

**Plaquette 1 - Échelonnement, rang,
compatibilité et systèmes à paramètre**
Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)
Exercices

Méthode

On échelonne par le **pivot de Gauss**, on lit le **rang** et le nombre de paramètres libres, on discute la **compatibilité**, et on interprète géométriquement l'ensemble des solutions.

Exercice 1 - Système 2x2

Résoudre
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 2 - Pivot de Gauss 3x3

Résoudre
$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

Exercice 3 - Système incompatible

Résoudre
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 - Système indéterminé

Résoudre
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 5 - Système homogène

Résoudre
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 - Rang d'un système

Déterminer le rang du système
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$
 et dire s'il est compatible.

Exercice 7 - Système à paramètre

Discuter selon m le système
$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

Exercice 8 - Quatre inconnues

Résoudre $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 4 \end{cases}$

Exercice 9 - Condition de compatibilité

Pour quelles valeurs de a le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = a \end{cases}$ est-il compatible ?

Exercice 10 - Interprétation géométrique

Déterminer l'intersection des plans $x + y + z = 3$ et $x - y + 2z = 0$, sous forme paramétrique.

Exercice 11 - Application : mélange

On mélange trois solutions à 10 %, 20 % et 50 % de sucre pour obtenir 10 litres à 25 %, en utilisant deux fois plus de la première que de la deuxième. Déterminer les volumes.

Exercice 12 - Système de Vandermonde

Déterminer a, b, c tels que la parabole $y = ax^2 + bx + c$ passe par $(1, 2)$, $(2, 3)$ et $(3, 6)$.

Exercice 13 - Inverse par Gauss-Jordan

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

- Appliquer la méthode de Gauss-Jordan à la matrice augmentée $(A \mid I_3)$.
- En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
- Vérifier en calculant AA^{-1} (au moins deux coefficients).

d) En déduire la solution du système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 - Équilibrer une réaction chimique

On veut équilibrer la combustion du propane : $a \text{C}_3\text{H}_8 + b \text{O}_2 \rightarrow c \text{CO}_2 + d \text{H}_2\text{O}$, avec a, b, c, d entiers naturels non nuls les plus petits possibles.

- Écrire la conservation des atomes de carbone, d'hydrogène et d'oxygène sous forme d'un système homogène.
- Résoudre ce système par le pivot de Gauss en prenant d comme inconnue libre.
- En déduire les coefficients stœchiométriques.
- Pourquoi l'ensemble des solutions réelles est-il une droite vectorielle ?

Exercice 15 – Synthèse : discussion complète

Discuter et résoudre selon a :
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$