

Plaquette 5 – Modélisation par des systèmes linéaires

Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Un problème concret se traite en quatre temps : **choisir les inconnues** (avec leur unité), **traduire chaque contrainte** par une équation linéaire (conservation, équilibre, bilan), **résoudre** par le pivot en discutant le rang, puis **interpréter** : une solution négative ou une infinité de solutions a un sens physique. On rencontre des lois de conservation (Kirchhoff, flux, atomes), des états d'équilibre (Leontief, Markov, chaleur stationnaire, statique) et des problèmes d'ajustement (moindres carrés).

Exercice 1 – Circuit électrique

Un générateur de tension $E = 12 \text{ V}$ alimente une résistance $R_1 = 2 \Omega$ en série avec deux résistances en parallèle, $R_2 = 3 \Omega$ et $R_3 = 6 \Omega$. On note I_1 le courant débité par le générateur, I_2 et I_3 ceux des branches R_2 et R_3 .

- Écrire la loi des nœuds et deux lois des mailles.
- Résoudre le système obtenu.
- Vérifier avec la résistance équivalente.
- Calculer la puissance dissipée dans chaque résistance et vérifier le bilan d'énergie.

Exercice 2 – Réseau de circulation

Quatre carrefours A, B, C, D forment un rond-point à sens unique $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$; on note x_1, x_2, x_3, x_4 les débits (véhicules/heure) sur AB, BC, CD, DA . Débits extérieurs : en A , 500 entrent et 200 sortent ; en B , 100 entrent et 300 sortent ; en C , 200 entrent et 400 sortent ; en D , 300 entrent et 200 sortent.

- Écrire la conservation des véhicules en chaque carrefour.
- Montrer que le système est de rang 3 et le résoudre avec x_4 comme paramètre.
- Les débits étant positifs, quelle est la plus petite valeur possible de x_4 ? Et de x_1 ?
- Pourquoi le rang n'est-il pas 4 ?

Exercice 3 – Modèle de Leontief

Une économie a deux secteurs : énergie (E) et industrie (I). Produire 1 € d'énergie consomme 0,2 € d'énergie et 0,4 € d'industrie ; produire 1 € d'industrie consomme 0,3 € d'énergie et 0,1 € d'industrie. La demande finale est $d = (100, 50)$ (en millions d'euros).

- Justifier le modèle $X = AX + d$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$.
- Résoudre $(I_2 - A)X = d$.
- Interpréter les coefficients de $(I_2 - A)^{-1}$.
- La demande en énergie augmente de 10. De combien doit augmenter chaque production ?

Exercice 4 - Loi stationnaire d'une chaîne de Markov

Un client est soit chez l'opérateur A , soit chez B . D'un mois à l'autre, un client de A y reste avec probabilité 0,9 ; un client de B y reste avec probabilité 0,5. On note $\pi = (\pi_A, \pi_B)$ la répartition des parts de marché.

- Écrire la matrice de transition P et justifier que la répartition du mois suivant est πP .
- Une répartition **stationnaire** vérifie $\pi P = \pi$ et $\pi_A + \pi_B = 1$. Écrire le système et le résoudre.
- Pourquoi le système $\pi(P - I) = 0$ seul ne suffit-il pas ?
- Partant de $\pi_0 = (0,5; 0,5)$, calculer π_1, π_2 et comparer à b).

Exercice 5 - Équilibrer une réaction d'oxydoréduction

Équilibrer $a \text{KMnO}_4 + b \text{HCl} \longrightarrow c \text{KCl} + d \text{MnCl}_2 + e \text{H}_2\text{O} + f \text{Cl}_2$.

- Écrire une équation par élément (K, Mn, O, H, Cl).
- Résoudre ce système homogène de 5 équations à 6 inconnues en fonction de f .
- Donner les plus petits coefficients entiers.
- Vérifier le bilan de chaque élément.

Exercice 6 - Température stationnaire d'une plaque

Une plaque carrée est discrétisée : quatre points intérieurs a (haut gauche), b (haut droite), c (bas gauche), d (bas droite). Le bord supérieur est à 100 °C, les trois autres bords à 0 °C. À l'équilibre, la température en un point intérieur est la **moyenne** de ses quatre voisins.

- Écrire les quatre équations.
- Utiliser la symétrie gauche-droite pour réduire à deux inconnues, et résoudre.
- Vérifier dans les quatre équations.
- Interpréter : la moyenne des quatre températures intérieures vaut 25 °C. Pourquoi est-ce cohérent ?

Exercice 7 - Équilibre d'une masse suspendue

Une charge de poids 100 N est suspendue à deux câbles faisant avec l'horizontale des angles de 30° (câble 1, à gauche) et 60° (câble 2, à droite). On note T_1, T_2 les tensions.

- Écrire l'équilibre des forces en projection horizontale et verticale.
- Résoudre le système.
- Vérifier que T_1 et T_2 sont inférieures à 100 N. Est-ce toujours le cas ?
- Que devient le système si les deux angles valent α (symétrique) ? Étudier $\alpha \rightarrow 0$.

Exercice 8 - Prix des billets

Trois groupes visitent un musée. Le premier (2 adultes, 3 enfants, 1 senior) paie 54 € ; le deuxième (1 adulte, 2 enfants, 2 seniors) paie 44 € ; le troisième (3 adultes, 1

enfant, 1 senior) paie 52 €.

a) Écrire le système et calculer son déterminant.

b) Résoudre.

c) Un quatrième groupe (2 adultes, 2 enfants, 2 seniors) : combien paie-t-il ? Répondre **sans** utiliser les prix, par une combinaison des trois premiers groupes.

d) Si l'on ne connaissait que les deux premiers groupes, que pourrait-on dire ?

Exercice 9 - Mélange d'alliages

Trois alliages ont les compositions (cuivre, zinc, étain) suivantes :

$A = (60\%, 30\%, 10\%)$, $B = (20\%, 50\%, 30\%)$, $C = (40\%, 40\%, 20\%)$. On veut obtenir 44 kg de cuivre, 38 kg de zinc et 18 kg d'étain en mélangeant x , y , z kg de A , B , C .

a) Écrire le système.

b) Montrer que C est le « mélange à parts égales » de A et B , et en déduire que le système n'est pas de Cramer.

c) Résoudre.

d) Déterminer toutes les solutions **physiquement possibles** et celle qui utilise le plus d'alliage C .

Exercice 10 - Chiffre de Hill

On code les lettres $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow 1$, ..., $Z \rightarrow 25$. Le chiffre de Hill code un bloc de deux lettres $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ par $Y = KX$ modulo 26, avec $K = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Coder le bloc « HI ».

b) Calculer $\det K$ et justifier que K est inversible modulo 26.

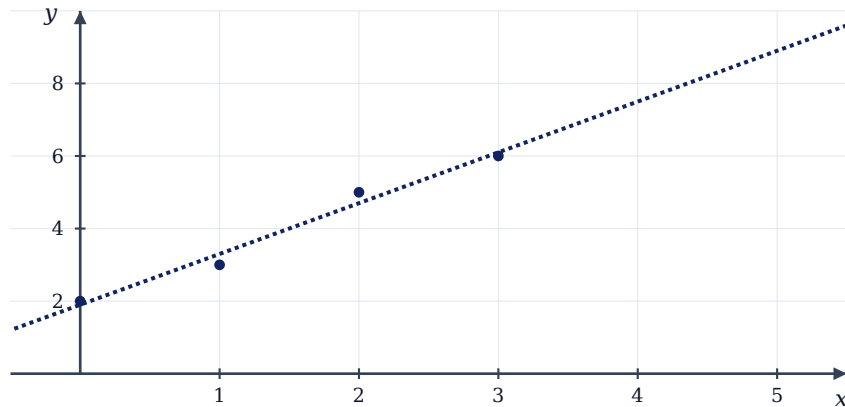
c) Déterminer K^{-1} modulo 26 (utiliser l'inverse de 9 modulo 26).

d) Décoder le résultat de a) et vérifier.

Exercice 11 – Ajustement d'une tendance

Les ventes d'un produit (en milliers) sur quatre années $t = 0, 1, 2, 3$ sont 2, 3, 5, 6. On ajuste un modèle $y = a + bt$.

- Écrire le système (incompatible) à 4 équations et 2 inconnues.
- Former et résoudre les équations normales.
- Calculer les résidus et leur somme des carrés.
- Prévoir les ventes pour $t = 5$ et discuter la fiabilité.

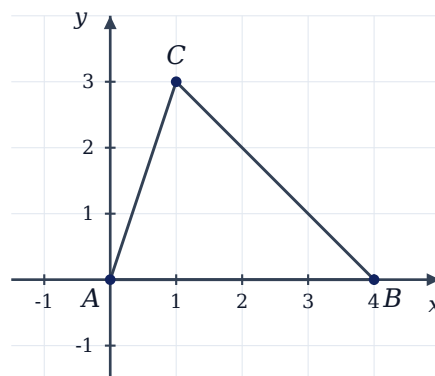


Les ventes et la droite ajustée (pointillés).

Exercice 12 – Cercle circonscrit

Soit le triangle $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(1, 3)$.

- Traduire « $\Omega(x, y)$ est équidistant de A, B, C » par deux équations, et montrer qu'elles sont **linéaires**.
- Résoudre et donner le centre et le rayon du cercle circonscrit.
- Interpréter chaque équation comme une médiatrice.
- Pour trois points alignés, que devient le système ?



Le triangle ABC.

Exercice 13 – Régime alimentaire

Trois aliments apportent, pour 100 g : aliment 1 : 10 g de protéines, 20 g de glucides, 5 g de lipides ; aliment 2 : 20 g, 10 g, 10 g ; aliment 3 : 5 g, 40 g, 5 g. On veut

exactement 60 g de protéines, 120 g de glucides et 35 g de lipides.

- Écrire le système en q_1, q_2, q_3 (en centaines de grammes).
- Le résoudre.
- La solution est-elle réalisable (quantités positives) ?
- Si l'on remplaçait l'objectif de lipides par 20 g, que se passerait-il ?

Exercice 14 – Somme de puissances par un système

On admet que $S_n = \sum_{k=1}^n k^3$ est un polynôme de degré 4 en n , sans terme constant : $S_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$.

- Écrire le système linéaire obtenu avec $n = 1, 2, 3, 4$.
- Le résoudre.
- Vérifier que $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- Contrôler pour $n = 10$.

Exercice 15 – Synthèse : chaîne de Markov à trois états

Le temps d'une ville est soleil (S), nuages (N) ou pluie (P). Les transitions d'un jour à l'autre sont données par $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ (ligne = temps du jour).

- Écrire le système donnant la loi stationnaire $\pi = (\pi_S, \pi_N, \pi_P) : \pi M = \pi$ et $\pi_S + \pi_N + \pi_P = 1$.
- Montrer que les trois équations de $\pi(M - I) = 0$ sont liées, et remplacer l'une d'elles par la normalisation.
- Résoudre.
- Sur une année de 365 jours, combien de jours de pluie attendre à long terme ?