

Plaquelette 2 - Opérations élémentaires, Gauss-Jordan et calcul matriciel

Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Le pivot de Gauss n'est pas qu'une recette : chaque opération sur les lignes est la multiplication à gauche par une **matrice élémentaire** inversible, ce qui explique pourquoi elle ne change pas les solutions. On pousse l'algorithme jusqu'à la **forme échelonnée réduite** (Gauss-Jordan), on factorise $A = LU$, on compare avec les **formules de Cramer**, on évalue le **coût** en opérations et on observe l'effet des **erreurs d'arrondi** (pivot partiel, matrice de Hilbert).

Exercice 1 - Forme échelonnée réduite et rang

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

- Échelonner M par le pivot de Gauss, puis la mettre sous forme échelonnée réduite.
- Donner le rang de M et les colonnes pivots.
- On considère le système homogène $MX = 0$ d'inconnues x, y, z, t . Identifier les inconnues principales et secondaires et résoudre.
- Vérifier une solution non nulle.

Exercice 2 - Matrices élémentaires

On travaille avec des matrices 3×3 .

- Écrire la matrice E telle que EA s'obtienne à partir de A par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$. Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminer E^{-1} et interpréter.
- Écrire la matrice P de l'échange $L_1 \leftrightarrow L_3$ et la matrice D de $L_2 \leftarrow 5L_2$. Calculer P^2 et D^{-1} .
- Que se passe-t-il si l'on multiplie A par E à droite ?

Exercice 3 - Décomposition LU

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

- Échelonner A sans échange de lignes en notant les multiplicateurs utilisés. En déduire U .
- Construire L (triangulaire inférieure à diagonale unité, contenant les multiplicateurs) et vérifier $A = LU$.

c) Résoudre $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix}$ en résolvant $LY = B$ puis $UX = Y$.

d) Quel est l'intérêt de LU quand on doit résoudre le système pour de nombreux seconds membres ?

Exercice 4 - Formules de Cramer

On considère le système $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14. \\ x + 4y + 9z = 36 \end{cases}$

a) Calculer le déterminant Δ de la matrice du système (pivot ou règle de Sarrus).

b) Résoudre par les formules de Cramer.

c) Résoudre par le pivot de Gauss et comparer l'effort.

d) Pourquoi Cramer n'est-il jamais utilisé pour les grands systèmes ?

Exercice 5 - Coût du pivot de Gauss

On compte les multiplications et divisions (les additions sont en nombre comparable).

a) Montrer que la **remontée** d'un système triangulaire $n \times n$ demande $\frac{n(n+1)}{2}$ opérations.

b) Pour éliminer sous le k -ième pivot dans un système $n \times n$ (avec second membre), montrer qu'il faut environ $(n-k)(n-k+1)$ opérations.

c) En déduire que l'échelonnement coûte environ $\sum_{j=1}^{n-1} j(j+1) \approx \frac{n^3}{3}$ multiplications.

d) Un ordinateur effectue 10^9 opérations par seconde. Estimer le temps de résolution d'un système de 10 000 équations.

Exercice 6 - Pivot partiel et erreurs d'arrondi

Soit $\varepsilon > 0$ très petit et le système $\begin{cases} \varepsilon x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

a) Résoudre exactement ; donner un développement de x et y quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

b) On résout en prenant ε comme pivot. Montrer qu'on obtient $y = \frac{2 - \frac{1}{\varepsilon}}{1 - \frac{1}{\varepsilon}}$ puis

$$x = \frac{1 - y}{\varepsilon}.$$

c) Une machine arrondit à 16 chiffres significatifs. Avec $\varepsilon = 10^{-20}$, expliquer pourquoi elle trouve $y = 1$ puis $x = 0$: l'erreur sur x est totale.

d) Refaire le calcul en **échangeant les lignes** (pivot partiel : on prend le plus grand pivot en valeur absolue) et conclure.

Exercice 7 - Deux seconds membres à la fois

On cherche les paraboles $y = a + bx + cx^2$ passant par trois points d'abscisses 1, 2, 3.

- Écrire le système en (a, b, c) pour les ordonnées (y_1, y_2, y_3) .
- Résoudre simultanément les deux cas $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 1)$ et $(2, 5, 10)$ en échelonnant la matrice augmentée à deux colonnes de seconds membres.
- Vérifier les deux paraboles.
- Reconnaître la seconde parabole directement.

Exercice 8 - Système 4×4 et interpolation cubique

On cherche le polynôme $P = a + bx + cx^2 + dx^3$ tel que $P(1) = 10$, $P(-1) = -2$, $P(2) = 49$, $P(-2) = -11$.

- Écrire le système 4×4 .
- En formant $P(1) + P(-1)$ et $P(1) - P(-1)$ (ainsi que pour ± 2), le découpler en deux systèmes 2×2 (parties paire et impaire de P).
- Résoudre et donner P .
- Vérifier les quatre conditions.

Exercice 9 - Matrice non inversible et noyau

Soit $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Échelonner K et montrer qu'elle n'est pas inversible.
- Déterminer le noyau $\{X: KX = 0\}$.
- Pour quels $B = (b_1, b_2, b_3)$ le système $KX = B$ est-il compatible ?
- Résoudre $KX = (1, 2, 0)$.

Exercice 10 - Inverse d'une matrice triangulaire

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Justifier que T est inversible.
- Calculer T^{-1} par Gauss-Jordan (on ne fait que des remontées).
- Application : $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Vérifier $TT^{-1} = I_3$.
- Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.

Exercice 11 - Système tridiagonal et équation différentielle

On approche la solution de $-u'' = 1$ sur $[0; 1]$ avec $u(0) = u(1) = 0$. On pose $h = \frac{1}{5}$, $x_i = ih$, et $u_i \approx u(x_i)$ pour $i = 1, \dots, 4$, avec $u_0 = u_5 = 0$.

- a) En approchant $u''(x_i)$ par $\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$, montrer qu'on obtient le système $2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = h^2$.
- b) Écrire la matrice (**tridiagonale**) et résoudre le système par le pivot.
- c) Comparer avec la solution exacte $u(x) = \frac{x(1-x)}{2}$.
- d) Pourquoi le pivot sur une matrice tridiagonale ne coûte-t-il qu'environ n opérations ?

Exercice 12 - Condition de compatibilité géométrique

Dans l'espace, on considère les plans $P_1: x + y + z = 1$, $P_2: x - y + 2z = 0$ et $P_3: 2x + 3z = \lambda$.

- a) Échelonner le système formé par les trois équations.
- b) Discuter selon λ le nombre de solutions.
- c) Interpréter géométriquement : les trois plans ont-ils un point commun, une droite commune, aucun point commun ?
- d) Pour la valeur de λ où l'intersection est non vide, donner une représentation paramétrique de la droite commune.

Exercice 13 - Inverse d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- a) Appliquer Gauss-Jordan à $(A \mid I_2)$ en supposant $a \neq 0$, et montrer que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
- b) Retrouver $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- c) Que se passe-t-il si $a = 0$?
- d) Application : pour quels réels m la matrice $\begin{pmatrix} m & 2 \\ 3 & m+1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Donner son inverse pour $m = 0$.

Exercice 14 - Opérations sur les colonnes : attention

On résout $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$.

- a) Résoudre par le pivot sur les lignes.
- b) Un étudiant effectue $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ sur la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ du système, puis résout « normalement ». Montrer qu'il résout en fait un autre système, en l'inconnue $X' = (x', y')$, et relier X' à X .
- c) Retrouver la bonne solution à partir de sa réponse.
- d) Conclure : quelles opérations sont autorisées sans précaution sur un système ?

Exercice 15 - Synthèse : la matrice de Hilbert

La matrice de Hilbert d'ordre 3 est $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (coefficients $\frac{1}{i+j-1}$).

a) Montrer que $\det H = \frac{1}{2160}$ par le pivot de Gauss.

b) On admet $H^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$. Vérifier une ligne de HH^{-1} .

c) Résoudre $HX = B_1$ avec $B_1 = \left(\frac{11}{6}, \frac{13}{12}, \frac{47}{60}\right)$ (somme des lignes), puis $HX = B_2$ avec $B_2 = B_1 + (0,01, 0, 0)$. Comparer.

d) Expliquer ce phénomène de **mauvais conditionnement**.