

Plaquette 3 – Structure de l'ensemble des solutions

Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

On ne se contente plus de trouver les solutions : on décrit la **structure** de leur ensemble. Pour un système homogène, c'est un **sous-espace vectoriel** (le noyau) dont on donne une base ; pour un système quelconque, c'est un **sous-espace affine** : une solution particulière plus le noyau. On passe d'une description **paramétrique** à une description **cartésienne** (et inversement) en éliminant les paramètres, on décrit l'**image** par des conditions de compatibilité, et on traite les systèmes sans solution par les **moindres carrés**.

Exercice 1 – Sous-espace affine de solutions

On considère le système $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + 2y + 3z + 4t = 10 \end{cases}$.

- Résoudre en exprimant x et y en fonction de z et t .
- Écrire l'ensemble des solutions sous la forme $X_0 + \text{Vect}(U, V)$.
- Vérifier que X_0 est solution et que U, V sont solutions du système homogène associé.
- Quelle est la dimension de l'ensemble des solutions ? Donner une autre solution particulière et vérifier qu'elle diffère de X_0 d'un élément de $\text{Vect}(U, V)$.

Exercice 2 – Principe de superposition

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Résoudre $AX = B_1$ et $AX = B_2$ avec $B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Énoncer et démontrer le principe de superposition.
- En déduire sans nouveau calcul la solution de $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- En physique : dans un circuit linéaire, deux générateurs agissant séparément produisent les courants I_1 et I_2 . Que produit leur action simultanée ?

Exercice 3 – Équation redondante et paramètres libres

Soit le système à 5 inconnues $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$.

- Montrer que la troisième équation est combinaison des deux premières.
- Échelonner et déterminer le rang, les inconnues principales et secondaires.
- Écrire la solution générale.
- Combien de paramètres faut-il pour décrire les solutions ? Retrouver ce nombre

par le théorème du rang.

Exercice 4 - Droite : paramétrique et cartésienne

Dans $\mathbb{R}^3$, soit D la droite passant par $A(1, 0, 2)$ et dirigée par $u = (1, 2, -1)$.

- Écrire une représentation paramétrique de D .
- Éliminer le paramètre pour obtenir D comme ensemble des solutions d'un système de deux équations.
- Inversement, résoudre le système obtenu et retrouver A et u (à un choix près).
- Le point $M(3, 4, 0)$ est-il sur D ? Et $N(0, -2, 4)$?

Exercice 5 - Plan : éliminer deux paramètres

Soit $P = \{(1 + s, 1 + t, s + t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

- Montrer que P est un plan affine de $\mathbb{R}^3$ et donner un point et deux vecteurs directeurs.
- Déterminer une équation cartésienne de P en écrivant la condition de compatibilité du système d'inconnues (s, t) .
- Retrouver ce résultat avec un vecteur normal.
- Déterminer l'intersection de P avec la droite $\{(u, u, u) : u \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6 - Appartenance à un sous-espace engendré

Soient $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (2, 1, 3)$ dans $\mathbb{R}^3$, et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

- Le vecteur $v = (5, 2, 7)$ appartient-il à F ? Si oui, l'écrire comme combinaison de u_1 et u_2 .
- Même question pour $w = (1, 1, 1)$.
- Déterminer une équation cartésienne de F .
- Pour quel réel m le vecteur $(1, m, 4)$ est-il dans F ?

Exercice 7 - Plus d'inconnues que d'équations

- Montrer qu'un système **homogène** de p équations à $n > p$ inconnues admet une solution non nulle.
- Application : montrer qu'il existe un polynôme non nul P de degré ≤ 3 tel que $P(0) = P(1) = P(2) = 0$, et le déterminer.
- Montrer que quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont toujours liés.
- Un système non homogène de 2 équations à 3 inconnues a-t-il toujours une solution ?

Exercice 8 - Systèmes équivalents

Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

- Montrer que $S_1: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ et $S_2: \begin{cases} 2x = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ sont équivalents.

- b) Montrer que chaque équation de S_2 est combinaison linéaire des équations de S_1 , et réciproquement.
- c) Les systèmes $\{x + y = 2\}$ et $\{x + y = 2, 2x + 2y = 4\}$ sont-ils équivalents ? Et $\{x + y = 2\}$ et $\{x - y = 0\}$, qui ont tous deux une infinité de solutions ?
- d) Pourquoi les opérations élémentaires donnent-elles toujours un système équivalent ?

Exercice 9 - Solutions entières d'un système

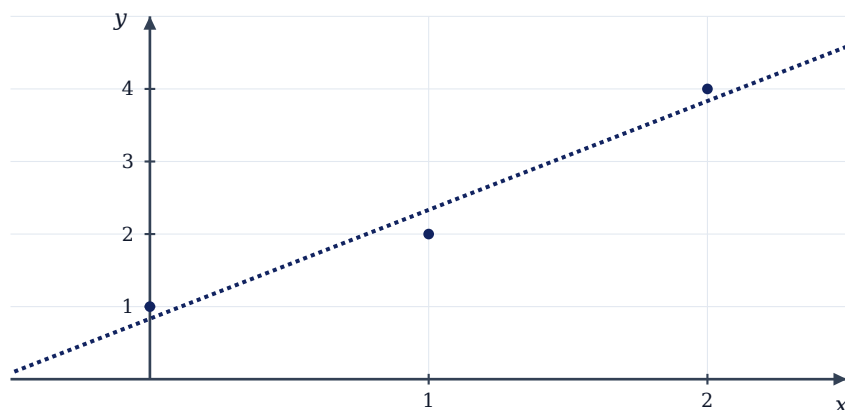
Une tirelire contient 10 pièces de 1, 2 et 3 €, pour un total de 20 €. On note x, y, z les nombres de pièces de 1, 2 et 3 €.

- a) Écrire le système et le résoudre dans $\mathbb{R}^3$.
- b) Déterminer toutes les solutions en entiers naturels.
- c) Combien y a-t-il de compositions possibles ? Laquelle contient le plus de pièces de 2 € ?
- d) Si l'on sait de plus qu'il y a autant de pièces de 1 € que de 3 €, la réponse est-elle unique ?

Exercice 10 - Moindres carrés

On cherche la droite $y = a + bx$ passant « au mieux » par les points $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$.

- a) Écrire le système $AX = B$ d'inconnue $X = (a, b)$ exprimant que la droite passe par les trois points, et montrer qu'il est incompatible.
- b) Former les équations normales $A^TAX = A^TB$ et les résoudre.
- c) Calculer les résidus et vérifier que leur somme est nulle.
- d) Interpréter : quelle quantité la solution minimise-t-elle ?



Les trois points et la droite des moindres carrés (pointillés).

Exercice 11 - Base du noyau

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer la forme échelonnée réduite de A et son rang.

- b) Déterminer une base du noyau de A .
- c) Vérifier le théorème du rang.
- d) Le système $AX = (1, 2, 1)$ est-il compatible ? Si oui, donner toutes les solutions.

Exercice 12 - Équations cartésiennes de l'image

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$).

- a) Déterminer le rang de A .
- b) Pour $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, résoudre $AX = B$ en fonction de B et en déduire les conditions de compatibilité.
- c) En déduire deux équations cartésiennes de $\text{Im}A$ et sa dimension.
- d) Le vecteur $(3, 5, 8, 2)$ est-il dans $\text{Im}A$? Et $(1, 1, 1, 1)$?

Exercice 13 - Solutions non triviales et valeurs propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) Montrer que le système homogène $(A - \lambda I_2)X = 0$ a une solution non nulle si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$.
- b) Déterminer ces valeurs de λ .
- c) Pour chacune, résoudre le système et donner une base de l'ensemble des solutions.
- d) Vérifier que les deux vecteurs obtenus forment une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer AX pour chacun.

Exercice 14 - Retrouver un système à partir de deux solutions

On sait qu'un système de rang 2 à trois inconnues admet les solutions $X_1 = (1, 2, 3)$ et $X_2 = (2, 2, 1)$.

- a) Montrer que $X_2 - X_1$ est solution du système homogène associé.
- b) En déduire l'ensemble de toutes les solutions.
- c) Construire un tel système : deux équations dont l'ensemble des solutions est exactement celui trouvé.
- d) Le point $(0, 2, 5)$ est-il solution ? Et $(3, 2, 0)$?

Exercice 15 - Synthèse : polynômes sous contraintes linéaires

On cherche les polynômes $P = a + bX + cX^2$ tels que $P(0) = 0$ et $\int_0^1 P(t) dt = 1$.

- a) Traduire ces conditions par un système linéaire en (a, b, c) .
- b) Résoudre et décrire l'ensemble des solutions comme un sous-espace affine de $\mathbb{R}_2[X]$.
- c) Parmi ces polynômes, lequel vérifie de plus $P(1) = 0$? Tracer mentalement son

allure.

d) Montrer qu'avec la condition supplémentaire $P'(0) = 0$, il existe une unique solution, et la déterminer.