

Plaquette 4 – Systèmes à paramètres : discussions complètes

Systèmes linéaires et pivot de Gauss — Licence 1 (L1)

Exercices

Méthode

Un système à paramètre se **discute** : on cherche d'abord les valeurs critiques (déterminant nul, pivot qui s'annule), on traite le **cas général** (souvent une solution unique, donnée par le pivot ou par Cramer), puis **chaque cas particulier séparément**, en reprenant le système avec la valeur remplacée. La règle d'or : **on ne divise jamais par une expression qui dépend du paramètre sans avoir écarté les valeurs qui l'annulent**. La conclusion se présente sous forme de tableau.

Exercice 1 – Le système symétrique classique

Discuter selon $m \in \mathbb{R}$ le système
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

- Calculer le déterminant et montrer qu'il vaut $-(m-1)^2(m+2)$.
- Cas général : en additionnant les trois équations, trouver la solution.
- Traiter $m = 1$ et $m = -2$.
- Résumer dans un tableau.

Exercice 2 – Paramètres dans le second membre

Soit le système
$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + y + z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases}$$

- Montrer que la troisième ligne de la matrice est la différence des deux premières. Le système peut-il avoir une solution unique ?
- Échelonner la matrice augmentée et trouver la condition de compatibilité sur (a, b, c) .
- Lorsque la condition est vérifiée, résoudre.
- Application : $(a, b, c) = (1, 5, 4)$ puis $(1, 5, 5)$.

Exercice 3 – Un paramètre qui ne change pas la solution

Discuter selon $a \in \mathbb{R}$ le système
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = a \end{cases}$$

- Calculer le déterminant et ses racines.
- Cas général : résoudre par les formules de Cramer. Que remarquez-vous ?
- Traiter $a = 1$ et $a = -1$. Le couple trouvé en b) est-il encore solution ?
- Interpréter géométriquement (deux droites du plan).

Exercice 4 - Paramètre donnant des solutions non nulles

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les réels λ pour lesquels le système homogène $AX = \lambda X$ admet une solution non nulle.
- Pour chacun, résoudre.
- Vérifier que A transforme chaque solution trouvée en un multiple d'elle-même.
- Pour les autres valeurs de λ , justifier que $X = 0$ est la seule solution.

Exercice 5 - Rang d'une matrice à paramètre

Soit $M_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & m \end{pmatrix}$.

- Échelonner M_m .
- Déterminer son rang selon m .
- Pour quelle valeur de m la troisième ligne est-elle combinaison des deux premières ? Donner cette combinaison.
- Discuter selon m la dimension de l'ensemble des solutions de $M_m X = 0$.

Exercice 6 - Deux paramètres

Discuter selon $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le système
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + 3y + 4z = b \end{cases}.$$

- Calculer le déterminant en fonction de a .
- Cas $a \neq 3$: combien de solutions ?
- Cas $a = 3$: échelonner et discuter selon b .
- Pour $a = 3$ et $b = 3$, donner l'ensemble des solutions.

Exercice 7 - Le piège des divisions

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, selon m , l'équation $(m - 1)x = m^2 - 1$.
- Un étudiant résout le système $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = m \end{cases}$ en écrivant « $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$: $(1 - m^2)y = 0$, donc $y = 0$ et $x = 1$ ». Quelle erreur commet-il ?
- Faire la discussion correcte.
- Formuler une règle générale.

Exercice 8 - Interpolation à nœud variable

On cherche $P = a + bX + cX^2$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(t) = 3$, où t est un réel.

- Écrire le système en (a, b, c) et calculer son déterminant en fonction de t .
- Pour $t \notin \{0, 1\}$, résoudre.

- c) Que se passe-t-il pour $t = 0$ et pour $t = 1$?
 d) Vérifier pour $t = 2$ et $t = -1$.

Exercice 9 - Cercle passant par trois points

Un cercle a une équation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

- a) Écrire le système linéaire en (α, β, γ) exprimant que le cercle passe par $O(0, 0)$, $A(2, 0)$ et $B(0, m)$.
 b) Résoudre selon m .
 c) Donner le centre et le rayon du cercle pour $m \neq 0$.
 d) Pour trois points quelconques, quand le système est-il sans solution ? Interpréter.

Exercice 10 - Inverse d'une matrice à paramètre

Soit $A_m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle inversible ?
 b) Calculer A_m^{-1} dans ce cas.
 c) Résoudre $A_m X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tous les m (y compris les valeurs critiques).
 d) Que devient A_m^{-1} quand $m \rightarrow 1$? Interpréter.

Exercice 11 - Droites concourantes

On considère les droites $D_1: x + y = 1$, $D_2: x - y = m$ et $D_3: 2x + my = 2$.

- a) Déterminer le point d'intersection de D_1 et D_2 en fonction de m .
 b) Pour quelles valeurs de m les trois droites sont-elles concourantes ?
 c) Interpréter en termes de compatibilité d'un système de trois équations à deux inconnues.
 d) Vérifier chaque valeur trouvée.

Exercice 12 - Famille de plans et droite fixe

Pour $m \in \mathbb{R}$, soit $P_m: x + my + z = 1$.

- a) Montrer que tous les plans P_m contiennent une même droite D , que l'on déterminera.
 b) Deux plans P_m et $P_{m'}$ ($m \neq m'$) : résoudre le système et retrouver D .
 c) Existe-t-il m tel que P_m passe par $(1, 2, 3)$?
 d) Le plan $y = 0$ appartient-il à la famille ? Quel plan contenant D n'y est pas ?

Exercice 13 - Résolution par Cramer avec paramètre

Soit le système $\begin{cases} mx + y = 2 \\ x + my = 1 + m \end{cases}$.

- a) Pour $m \neq \pm 1$, donner x et y par les formules de Cramer, sous forme simplifiée.
- b) Étudier les limites de x et y quand $m \rightarrow 1$ et quand $m \rightarrow -1$.
- c) Résoudre directement pour $m = 1$ et $m = -1$.
- d) Comparer b) et c).

Exercice 14 - Existence d'un polynôme à racine imposée

On cherche $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ tel que $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$ et $P(\lambda) = 0$, où λ est un réel.

- a) Écrire le système linéaire en (a, b, c) et le résoudre pour $\lambda \notin \{1, -1\}$.
- b) Retrouver le résultat sans calcul, par factorisation.
- c) Discuter les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$: combien de solutions ?
- d) Parmi les solutions pour $\lambda = 1$, laquelle a 1 pour racine **double** ?

Exercice 15 - Synthèse : système de Vandermonde et formule de Lagrange

Soient a, b, c trois réels **distincts** et d un réel. On résout
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}.$$

- a) Montrer que le déterminant vaut $(b - a)(c - a)(c - b)$ et conclure à l'unicité.
- b) Vérifier que $x = \frac{(d - b)(d - c)}{(a - b)(a - c)}$ convient pour la première inconnue en montrant que la solution est donnée par les polynômes de Lagrange évalués en d .
- c) Application : $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$.
- d) Que se passe-t-il si $a = b$?