

Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Licence 1 - Fiche de révision

1. Écriture matricielle

Système de n équations à p inconnues :

$$AX = B, \quad A \in M_{n,p}.$$

Matrice augmentée : $[A \mid B]$.

Compatible : au moins une solution. Homogène : $B = 0$.

2. Opérations élémentaires

$$L_i \leftrightarrow L_j,$$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \neq 0),$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j.$$

Elles conservent exactement l'ensemble des solutions.

3. Forme échelonnée

Pivot = premier coefficient non nul d'une ligne.

Échelonnée : pivots décalés vers la droite, zéros sous eux.

Réduite : pivots = 1 et seuls non nuls de leur colonne.

4. Algorithme de Gauss

1. Écrire $[A \mid B]$.
2. Choisir un pivot non nul.
3. Annuler sous le pivot.
4. Recommencer.
5. Remonter.
6. Paramétrer les variables libres.

5. Ligne contradictoire

Si l'échelonnement donne

$$(0 \cdots 0 \mid c), \quad c \neq 0,$$

alors le système est **incompatible**.

En revanche $(0 \cdots 0 \mid 0)$ n'ajoute aucune contrainte.

6. Rang

$$\text{rg}(A) = \text{nombre de pivots.}$$

Pour $A \in M_{n,p}$:

$$0 \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes.

7. Rouché-Capelli

$$\text{rg}(A) = \text{rg}([A \mid B])$$

$\iff$ système compatible.

Si compatible :

$$\# \text{ paramètres libres} = p - \text{rg}(A).$$

8. Trois cas

Pour p inconnues :

- $\text{rg}(A) < \text{rg}([A \mid B])$: aucune solution ;
- rangs égaux = p : solution unique ;
- rangs égaux $< p$: infinité de solutions.

9. Variables principales/libres

Colonne pivot $\Rightarrow$ variable principale.

Pas de pivot $\Rightarrow$ variable libre.

Une variable libre se paramètre ; elle ne vaut pas automatiquement 0.

Structure des solutions et applications

10. Système homogène

$$AX = 0$$

a toujours $X = 0$.

$$\dim \text{Ker}(A) = p - \text{rg}(A).$$

Si $p > n$, alors $\text{rg}(A) \leq n < p$, donc il existe des solutions non nulles.

11. Solution générale

Si $AX = B$ est compatible et X_p est une solution particulière :

$$\mathcal{S} = X_p + \text{Ker}(A).$$

Donc toute solution s'écrit

$$X = X_p + X_h, \quad AX_h = 0.$$

12. Système carré

Pour $A \in M_n$:

$$A \text{ inversible} \iff \text{rg}(A) = n.$$

Alors, pour tout B ,

$$AX = B$$

a une unique solution

$$X = A^{-1}B.$$

Avec déterminant : $\det A \neq 0$.

13. Inverse par Gauss-Jordan

Former

$$[A \mid I_n]$$

et réduire le bloc gauche :

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}].$$

Si on ne peut obtenir I_n , A n'est pas inversible.

14. Base de $\text{Ker}(A)$

Résoudre $AX = 0$, choisir les variables libres comme paramètres, puis écrire

$$X = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k.$$

Alors

$$(v_1, \dots, v_k) \text{ est une base du noyau.}$$

15. Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$: intersection de droites.

Dans $\mathbb{R}^3$: intersection de plans.

Cas possibles : aucune solution, un point, ou une infinité (droite/plan selon le contexte).

16. Pièges classiques

- oublier de transformer le second membre ;
- confondre ligne nulle et contradiction ;
- poser une variable libre égale à 0 sans raison ;
- croire qu'un système homogène peut être sans solution ;
- lire une base de colonnes dans la matrice transformée au lieu de la matrice initiale.

17. Exemple express

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ une seule équation indépendante.

Avec $y = s, z = t$:

$$x = 1 - 2s + t.$$

Donc

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1).$$

18. À savoir rédiger

Toujours conclure par une phrase ou un ensemble explicite :

$$\mathcal{S} = \{\dots\}.$$

En cas d'incompatibilité, citer la ligne $0 = c$.

En cas de paramètres, préciser leur domaine, par ex. $s, t \in \mathbb{R}$.