

Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Licence 1 (L1) - Cours complet

Échelonnement, pivots, rang et description complète des solutions

Idée directrice. Un système linéaire se résout en effectuant des opérations élémentaires sur ses équations jusqu'à faire apparaître les inconnues principales. Le pivot de Gauss est un algorithme universel : il permet de décider si un système est compatible, de paramétrer toutes ses solutions, de calculer un rang, un noyau et, pour une matrice carrée inversible, son inverse.

1. Systèmes linéaires et écriture matricielle

Définition

Un **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, \dots, x_p$ s'écrit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n, \end{cases}$$

où les coefficients appartiennent à un corps $\mathbb{K}$ (en L1, généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On pose

$$A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Le système devient alors

$$\boxed{AX = B.}$$

La matrice

$$[A \mid B]$$

est appelée **matrice augmentée** du système.

Définition

Le système est :

- **compatible** s'il possède au moins une solution ;
- **incompatible** s'il n'en possède aucune ;
- **homogène** si $B = 0$, c'est-à-dire $AX = 0$.

Un système homogène est toujours compatible

Le système $AX = 0$ admet toujours la solution nulle $X = 0$.

2. Opérations élémentaires sur les lignes

Les transformations utilisées par l'algorithme de Gauss sont :

$$L_i \leftrightarrow L_j, \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \neq 0), \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j.$$

Invariance de l'ensemble des solutions

Une opération élémentaire sur les lignes transforme un système en un système **équivalent**, c'est-à-dire ayant exactement les mêmes solutions.

Pourquoi ? Chaque opération est réversible : permuter deux lignes se défait en les permutant à nouveau, multiplier une équation par $\lambda \neq 0$ se défait par $1/\lambda$, et ajouter λL_j se défait en ajoutant $-\lambda L_j$.

Piège classique

Les opérations élémentaires portent sur les **lignes entières** de la matrice augmentée. On doit donc transformer aussi la colonne du second membre.

3. Formes échelonnée et échelonnée réduite

Définition

Une matrice est sous **forme échelonnée** si :

- les lignes nulles sont placées en bas ;
- dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul (le **pivot**) est strictement à droite du pivot de la ligne précédente ;
- tous les coefficients situés sous un pivot sont nuls.

Elle est sous **forme échelonnée réduite** si, en plus :

- chaque pivot vaut 1 ;
- chaque pivot est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Exemple

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est échelonnée. Elle n'est pas réduite car il reste des coefficients non nuls au-dessus de certains pivots.

4. Algorithme du pivot de Gauss

Échelonnement de Gauss

Pour résoudre $AX = B$:

1. écrire la matrice augmentée $[A \mid B]$;
2. choisir un coefficient non nul comme premier pivot, éventuellement après échange de lignes ;
3. annuler tous les coefficients sous ce pivot ;
4. recommencer sur le sous-tableau restant ;
5. une fois la forme échelonnée obtenue, effectuer la **remontée** pour déterminer les inconnues principales ;
6. si nécessaire, poursuivre jusqu'à la forme échelonnée réduite.

Exemple : solution unique

Réolvons

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

On effectue

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1,$$

d'où

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right).$$

On échange L_2 et L_3 , puis

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2,$$

ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right).$$

Ainsi $z = 3$, puis $y = 2$ et $x = 1$. La solution est

$$(x, y, z) = (1, 2, 3).$$

5. Inconnues principales et inconnues libres

Une colonne contenant un pivot correspond à une **inconnue principale**. Une colonne sans pivot correspond à une **inconnue libre** (ou secondaire).

Exemple : infinité de solutions

Considérons

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x + 4y - 2z = 2. \end{cases}$$

La deuxième équation est le double de la première. Après échelonnement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

x est principale, y et z sont libres. Posons

$$y = s, \quad z = t.$$

Alors

$$x = 1 - 2s + t,$$

et l'ensemble des solutions vaut

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Cette écriture montre déjà la structure affine de l'ensemble des solutions.

6. Détection de l'incompatibilité

Ligne contradictoire

Un système est incompatible dès que l'échelonnement fait apparaître une ligne de la forme

$$(0 \cdots 0 \mid c), \quad c \neq 0,$$

c'est-à-dire une équation $0 = c$ impossible.

Exemple

Le système

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

donne après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

La seconde ligne signifie $0 = 1$: il n'y a aucune solution.

7. Rang et nombre de pivots

Définition

Le **rang** d'une matrice A , noté $\text{rg}(A)$, est le nombre de pivots obtenus dans une forme échelonnée de A .

Le rang ne dépend pas des choix de pivots effectués pendant l'algorithme. Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le rang.

Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$0 \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Critère de compatibilité de Rouché-Capelli

Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si

$$\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}([A \mid B])}.$$

S'il est compatible, le nombre de paramètres libres est

$$\boxed{p - \text{rg}(A)}.$$

Ainsi :

- si $\text{rg}(A) = \text{rg}([A \mid B]) = p$, la solution est unique ;
- si $\text{rg}(A) = \text{rg}([A \mid B]) < p$, il y a une infinité de solutions ;
- si $\text{rg}(A) < \text{rg}([A \mid B])$, il n'y a aucune solution.

8. Structure des solutions et système homogène associé

Considérons $AX = B$ compatible et soit X_p une solution particulière.

Solution générale

Toutes les solutions sont exactement

$$X = X_p + X_h, \quad X_h \in \text{Ker}(A),$$

où

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathbb{K}^p; AX = 0\}.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{S} = X_p + \text{Ker}(A).$$

Démonstration. Si $AX = B$ et $AX_p = B$, alors

$$A(X - X_p) = 0,$$

donc $X - X_p \in \text{Ker}(A)$. Réciproquement, si $X_h \in \text{Ker}(A)$,

$$A(X_p + X_h) = B + 0 = B.$$

Dimension du noyau : théorème du rang

Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$\dim \text{Ker}(A) = p - \text{rg}(A).$$

Système homogène

$AX = 0$ possède toujours $X = 0$. Si le nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations, $p > n$, alors

$$\text{rg}(A) \leq n < p,$$

donc $\dim \text{Ker}(A) = p - \text{rg}(A) > 0$: il existe nécessairement des solutions non nulles.

9. Systèmes carrés et systèmes de Cramer

Supposons $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Caractérisations de l'inversibilité

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est inversible ;
- $\text{rg}(A) = n$;
- la forme échelonnée réduite de A est I_n ;
- pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ possède une unique solution ;
- le système homogène $AX = 0$ n'a que la solution nulle.

Dans ce cas, $X = A^{-1}B$.

Si l'on dispose déjà du déterminant, on peut ajouter :

$$A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

Un système carré vérifiant cette condition est appelé **système de Cramer**.

10. Calcul d'une matrice inverse par Gauss-Jordan

Méthode $[A \mid I_n]$

Pour une matrice carrée A :

1. former la matrice augmentée $[A \mid I_n]$;
2. appliquer des opérations élémentaires jusqu'à transformer le bloc gauche en I_n ;
3. le bloc droit devient alors A^{-1} :

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}].$$

Si le bloc gauche ne peut pas devenir I_n , alors A n'est pas inversible.

Exemple

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on part de

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Après $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right),$$

d'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Lire une base grâce au pivot de Gauss

Le pivot de Gauss est aussi un outil d'algèbre linéaire.

Base du noyau

Pour déterminer une base de $\text{Ker}(A)$:

1. résoudre $AX = 0$;
2. choisir les inconnues libres comme paramètres ;
3. écrire X comme combinaison linéaire de vecteurs paramètres.

Les vecteurs obtenus forment une base du noyau.

Rang d'une famille de vecteurs

Si les vecteurs $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{K}^n$ sont placés en colonnes dans

$$A = (v_1 \ \cdots \ v_p),$$

alors

$$\text{rg}(A) = \dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_p).$$

Les colonnes pivot de la **matrice initiale** fournissent une sous-famille de colonnes formant une base de l'espace engendré.

Piège classique

Les opérations sur les lignes modifient les colonnes. Pour extraire une base de l'espace engendré par les colonnes, on repère les indices des colonnes pivot après échelonnement, puis on reprend les colonnes correspondantes dans la **matrice d'origine**.

12. Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^2$, une équation

$$ax + by = c$$

représente une droite (si $(a, b) \neq (0, 0)$). Deux équations peuvent représenter :

- deux droites sécantes : une solution ;
- deux droites parallèles distinctes : aucune solution ;
- deux droites confondues : une infinité de solutions.

Dans $\mathbb{R}^3$, une équation

$$ax + by + cz = d$$

représente un plan. Un système de plans peut avoir une intersection vide, un point, une droite, voire un plan commun selon les dépendances entre équations.

Exemple

Le système homogène

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

représente deux fois le même plan passant par l'origine. Son ensemble des solutions est un plan vectoriel de dimension 2.

13. Méthode complète pour rédiger une résolution

Checklist de résolution

1. Écrire proprement $[A \mid B]$.
2. Choisir des pivots simples si possible ; un échange de lignes est autorisé.
3. Noter chaque opération élémentaire.
4. Obtenir une forme échelonnée avant de conclure.
5. Rechercher une éventuelle ligne contradictoire.
6. Identifier colonnes pivot et variables libres.
7. Paramétrer les variables libres avec des lettres différentes.
8. Donner l'ensemble des solutions sous forme explicite, vectorielle ou affine.
9. Pour un système homogène, vérifier que 0 appartient bien à l'ensemble obtenu.

14. Erreurs fréquentes

1. Diviser une ligne par zéro

L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ n'est autorisée que pour $\lambda \neq 0$.

2. Confondre une ligne nulle et une contradiction

$$(0 \ \cdots \ 0 \mid 0)$$

ne donne aucune contrainte supplémentaire, tandis que

$$(0 \ \cdots \ 0 \mid c), \quad c \neq 0,$$

rend le système impossible.

3. Croire qu'une variable sans pivot vaut zéro

Une variable sans pivot est **libre**. Elle doit être paramétrée ; elle ne vaut zéro que si l'on choisit volontairement ce paramètre égal à zéro.

4. Oublier le second membre

Lors d'une opération de lignes sur une matrice augmentée, la colonne B doit subir exactement les mêmes opérations que A .

15. Exercices corrigés

Exercice 1 - Paramétrer un système

Résoudre

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x + 2y + 3z + 4t = 2. \end{cases}$$

Soustrayons la première équation à la seconde :

$$y + 2z + 3t = 1.$$

Posons $z = s$ et $t = u$. Alors

$$y = 1 - 2s - 3u,$$

puis, avec la première équation,

$$x = 1 - y - z - t = s + 2u.$$

Donc

$$(x, y, z, t) = (0, 1, 0, 0) + s(1, -2, 1, 0) + u(2, -3, 0, 1).$$

Exercice 2 - Compatibilité selon un paramètre

Étudier selon $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = m. \end{cases}$$

Après $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$0 = m - 2.$$

Ainsi :

- si $m \neq 2$, le système est incompatible ;
- si $m = 2$, il possède une infinité de solutions : $(x, y) = (1 - t, t)$.

Exercice 3 - Base d'un noyau

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Résoudre $AX = 0$ revient à

$$x + 2y - z = 0.$$

En posant $y = s$, $z = t$, on obtient

$$x = -2s + t,$$

donc

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect}((-2, 1, 0), (1, 0, 1)).$$

Une base est donc

$$\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

À retenir. Le pivot de Gauss ne sert pas seulement à “trouver des nombres”. Il met en évidence la structure du problème : les pivots mesurent le rang, les colonnes sans pivot produisent les paramètres libres, les lignes contradictoires détectent l'incompatibilité et, pour $AX = B$ compatible, l'ensemble des solutions est une translation de $\text{Ker}(A)$.