

Plaquette 2 – Calcul littéral : développer, factoriser, réduire

Automatismes — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Développer : écrire un produit sous forme de somme. **Factoriser** : écrire une somme sous forme de produit.

Distributivité.

$$k(a + b) = ka + kb \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Les trois identités remarquables.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Lues de droite à gauche, ce sont les trois méthodes de factorisation les plus utiles.

Forme à reconnaître	Factorisation
$a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b)^2$
$a^2 - b^2$	$(a - b)(a + b)$

Facteur commun. On cherche un facteur présent dans chaque terme, éventuellement une parenthèse entière :

$$ka + kb = k(a + b)$$

Signes devant une parenthèse. $-(a - b) = -a + b$: le signe $-$ change **tous** les termes de la parenthèse.

Contrôle numérique. Deux expressions égales prennent la même valeur pour **toute** valeur de x : tester $x = 1$, $x = 0$ et $x = -2$ repère presque toujours une erreur de développement.

⚠ $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$: le double produit $2ab$ manque. De même, $\sqrt{a^2} = |a|$ et non a .

Correction de l'exercice 1 - Réduire une expression

Le principe. On ne regroupe que les termes **semblables** : les x^2 entre eux, les x entre eux, les constantes entre elles. Un x^2 et un x ne se regroupent jamais.

a) $A = (3x - 7x) + (5 + 2) = -4x + 7$.

b) $B = (4x^2 + 2x^2) + (-x + 6x) = 6x^2 + 5x$.

c) On développe d'abord : $5(x - 2) = 5x - 10$, donc

$$C = 5x - 10 - 3x = 2x - 10$$

d) Le signe $-$ devant la parenthèse change les deux signes :

$$D = 2x - 4x + 7 = -2x + 7$$

Le contrôle. On remplace x par 1 dans l'énoncé et dans le résultat. Pour D :

$2 - (4 - 7) = 2 + 3 = 5$, et $-2 + 7 = 5$ ✓.

L'erreur du d). Écrire $2x - 4x - 7$ est la faute la plus fréquente de la Seconde : la distributivité du signe $-$ porte sur **tous** les termes.

Réponse. a) $-4x + 7$ — b) $6x^2 + 5x$ — c) $2x - 10$ — d) $-2x + 7$.

Correction de l'exercice 2 - Développer par distributivité

La formule du cours.

$$k(a + b) = ka + kb$$

a) $A = 3 \times 2x + 3 \times (-5) = 6x - 15$.

b) $B = -4x - 12$: le facteur négatif change le signe des deux termes.

c) $C = x \times 2x + x \times (-7) = 2x^2 - 7x$.

d) On développe, puis on réduit :

$$D = -6x^2 + 8x + 5x = -6x^2 + 13x$$

Le contrôle pour $x = 1$. Énoncé : $-2 \times (3 - 4) + 5 = 2 + 5 = 7$. Résultat : $-6 + 13 = 7$ ✓.

Le point de vigilance. Dans le d), le terme $+5x$ est **hors** du produit : il ne se multiplie pas par $-2x$. On développe d'abord ce qui est entre parenthèses, on ajoute ensuite le reste.

Réponse. a) $6x - 15$ — b) $-4x - 12$ — c) $2x^2 - 7x$ — d) $-6x^2 + 13x$.

Correction de l'exercice 3 - Produit de deux binômes

La formule du cours (double distributivité) :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Pour E , avec $a = 2x$, $b = -3$, $c = x$, $d = 5$:

$$- ac = 2x \times x = 2x^2 ;$$

$$- ad = 2x \times 5 = 10x ;$$

$$- bc = -3 \times x = -3x ;$$

$$- bd = -3 \times 5 = -15.$$

En réduisant : $E = 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15$.

Pour F : $3x^2 - x + 12x - 4 = 3x^2 + 11x - 4$.

Le contrôle. Pour $x = 1$: $E = (2 - 3)(1 + 5) = -6$, et $2 + 7 - 15 = -6$ ✓. Pour F : $(5)(2) = 10$, et $3 + 11 - 4 = 10$ ✓.

Le réflexe qui évite les oublis. Un produit de deux binômes donne **quatre** produits avant réduction : si on n'en écrit que trois, il en manque un.

Réponse. $E = 2x^2 + 7x - 15$ et $F = 3x^2 + 11x - 4$.

Correction de l'exercice 4 - Développer avec une identité remarquable

Les formules du cours.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

a) Avec $a = x$ et $b = 6$: $x^2 + 2 \times x \times 6 + 36 = x^2 + 12x + 36$.

b) Avec $a = 3x$ et $b = 2$: $(3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 4 = 9x^2 - 12x + 4$.

c) Différence de deux carrés : $x^2 - 25$.

d) De même : $(2x)^2 - 49 = 4x^2 - 49$.

Le détail qui compte au b). $(3x)^2 = 9x^2$ et non $3x^2$: le carré porte sur le coefficient **et** sur la lettre.

Le contrôle. Pour $x = 1$ au b) : $(3 - 2)^2 = 1$, et $9 - 12 + 4 = 1$ ✓.

Réponse. a) $x^2 + 12x + 36$ — b) $9x^2 - 12x + 4$ — c) $x^2 - 25$ — d) $4x^2 - 49$.

Correction de l'exercice 5 - Reconnaître une identité pour factoriser

La méthode. On lit les identités remarquables de droite à gauche. On repère d'abord les deux carrés, puis on vérifie le double produit.

a) $x^2 + 10x + 25$: les carrés sont x^2 et 5^2 , et le double produit vaut $2 \times x \times 5 = 10x$ ✓.
Donc

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

b) Carrés x^2 et 7^2 , double produit $2 \times x \times 7 = 14x$, précédé du signe $-$:

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

c) Différence de deux carrés : $x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9)$.

d) $9x^2 = (3x)^2$ et $4 = 2^2$, donc $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$.

L'étape à ne pas sauter. La vérification du double produit : $x^2 + 10x + 26$ n'est pas factorisable par cette méthode, et $x^2 + 11x + 25$ non plus. Sans ce contrôle, on factorise une expression qui ne s'y prête pas.

Réponse. a) $(x + 5)^2$ — b) $(x - 7)^2$ — c) $(x - 9)(x + 9)$ — d) $(3x - 2)(3x + 2)$.

Correction de l'exercice 6 - Factoriser par un facteur commun

La formule du cours.

$$ka + kb = k(a + b)$$

a) Le facteur commun est $3x$: $6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$.

b) Facteur commun $5x$: $5x^3 - 20x = 5x(x^2 - 4)$. On peut poursuivre, car $x^2 - 4$ est une différence de carrés :

$$5x^3 - 20x = 5x(x - 2)(x + 2)$$

c) Facteur commun 4 : $4(x^2 + 3x + 2)$.

d) Facteur commun $-3x$: $-3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$. On peut aussi écrire $3x(2 - x)$, c'est la même expression.

Le réflexe à prendre. On factorise **au maximum** : après un facteur commun, on regarde toujours si la parenthèse restante est elle-même factorisable (identité remarquable, nouveau facteur commun). C'est ce qui distingue le b) d'une factorisation incomplète.

Réponse. a) $3x(2x + 3)$ — b) $5x(x - 2)(x + 2)$ — c) $4(x^2 + 3x + 2)$ — d) $-3x(x - 2)$.

Correction de l'exercice 7 - Un facteur commun qui est une parenthèse

Le principe. Un facteur commun peut être une expression entière, pas seulement un nombre ou une lettre.

Pour G , le facteur commun est $(x + 1)$:

$$G = (x + 1)[(x - 2) + 3x] = (x + 1)(4x - 2)$$

On peut aller plus loin en factorisant $4x - 2$ par 2 : $G = 2(x + 1)(2x - 1)$.

Pour H , on écrit $(2x - 5)^2 = (2x - 5)(2x - 5)$: le facteur commun est $(2x - 5)$.

$$H = (2x - 5)[(2x - 5) - (x + 1)]$$

Le crochet se réduit : $2x - 5 - x - 1 = x - 6$. Donc $H = (2x - 5)(x - 6)$.

Le piège du signe. Dans H , le signe $-$ devant $(x + 1)$ change les deux termes de la parenthèse : écrire $2x - 5 - x + 1$ est faux.

Le contrôle pour $x = 0$. $H = (-5)^2 - (-5)(1) = 25 + 5 = 30$, et $(-5)(-6) = 30$ ✓.

Réponse. $G = 2(x + 1)(2x - 1)$ et $H = (2x - 5)(x - 6)$.

Correction de l'exercice 8 - L'erreur à corriger

a) Pour $x = 1$: le membre de gauche vaut $(1 + 3)^2 = 16$, celui de droite $1 + 9 = 10$. Comme $16 \neq 10$, l'égalité est fausse.

b) La formule du cours est

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

donc $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Le terme oublié est le **double produit** $2 \times x \times 3 = 6x$.

c) L'égalité de l'élève revient à $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 9$, c'est-à-dire $6x = 0$, soit $x = 0$. Elle n'est donc vraie que pour cette unique valeur — ce qui ne suffit évidemment pas pour une identité, qui doit être vraie pour **tout** x .

Ce qu'il faut retenir. Une seule valeur qui marche ne prouve rien ; une seule valeur qui ne marche pas suffit à prouver qu'une égalité littérale est fausse. C'est la méthode la plus économique pour tester un développement.

Réponse. a) Pour $x = 1$, $16 \neq 10$ — b) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, le double produit $6x$ était oublié — c) seulement pour $x = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Deux expressions sont-elles égales ?

a) $P(3) = (3 - 4)(3 + 2) = (-1) \times 5 = -5$ et $Q(3) = 9 - 6 - 8 = -5$.

b) Non : une égalité vérifiée pour **une** valeur ne dit rien des autres. Par exemple $(x - 4)(x + 2)$ et $x^2 - 5$ coïncident aussi en un point sans être égales. Un test numérique sert à **repérer une erreur**, jamais à démontrer une identité.

c) On développe P avec la double distributivité :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$P(x) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$$

C'est exactement $Q(x)$: l'égalité est vraie pour tout réel x .

Le vocabulaire. P est la forme **factorisée**, Q la forme **développée** de la même fonction. La première donne immédiatement les solutions de l'équation $P(x) = 0$ ($x = 4$ ou $x = -2$), la seconde l'ordonnée à l'origine (-8) : on choisit la forme selon la question.

Réponse. a) $P(3) = Q(3) = -5$ — b) non, un test ne démontre rien — c) le développement donne $x^2 - 2x - 8$.

Correction de l'exercice 10 - Calcul mental par identité

L'idée. On écrit chaque nombre comme $100 \pm k$ (ou $50 \pm k$), puis on applique l'identité adaptée.

a) $101^2 = (100 + 1)^2$, et d'après

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

on obtient $10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$.

b) $99^2 = (100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.

c) $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2)$, donc d'après

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

cela vaut $10\,000 - 4 = 9\,996$.

d) $47 \times 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 2\,500 - 9 = 2\,491$.

À quoi cela sert. Reconnaître une différence de carrés dans un produit de deux nombres symétriques autour d'un nombre rond permet de calculer sans poser l'opération — et c'est le même geste que celui utilisé pour factoriser $x^2 - 9$.

Réponse. a) 10 201 — b) 9 801 — c) 9 996 — d) 2 491.

Correction de l'exercice 11 - Périmètre et aire littéraux

a) La formule du cours pour un rectangle de largeur ℓ et de longueur L :

$$P = 2(L + \ell)$$

Ici $P(x) = 2((x + 3) + x) = 2(2x + 3) = 4x + 6$.

b) L'aire est le produit des deux dimensions :

$$A = L \times \ell$$

donc $A(x) = x(x + 3) = x^2 + 3x$.

c) Pour $x = 5$: $P(5) = 4 \times 5 + 6 = 26$ cm et $A(5) = 25 + 15 = 40$ cm². (Contrôle direct : rectangle 5×8 , périmètre 26 cm, aire 40 cm² ✓.)

d) $A(6) = 36 + 18 = 54$ cm², donc l'aire augmente de $54 - 40 = 14$ cm².

Ce que montre le d). Le périmètre augmente toujours de 4 cm quand x augmente de 1 (fonction affine), alors que l'augmentation de l'aire, elle, dépend de la valeur de x : la fonction A n'est pas affine.

Réponse. a) $P(x) = 4x + 6$ — b) $A(x) = x^2 + 3x$ — c) 26 cm et 40 cm² — d) +14 cm².

Correction de l'exercice 12 - Mettre une situation en expression

a) Chaque roman coûte 12 € et chaque bande dessinée 15 €, donc

$$D = 12x + 15y$$

b) Une remise de 10 % correspond au coefficient multiplicateur 0,90 appliqué à la dépense totale :

$$D' = 0,9 \times (12x + 15y)$$

C'est la forme factorisée. En développant : $D' = 10,8x + 13,5y$.

c) Avec $x = 3$ et $y = 2$: $D = 36 + 30 = 66$ €, puis

$$D' = 0,9 \times 66 = 59,40$$

soit 59,40 €. Le calcul par la forme développée donne le même résultat : $32,4 + 27 = 59,4$ ✓.

Le sens des deux formes. La forme factorisée dit *comment on calcule* (on totalise, puis on applique la remise) ; la forme développée donne le **prix remisé unitaire** de chaque article : 10,80 € le roman et 13,50 € la bande dessinée.

Réponse. a) $D = 12x + 15y$ — b) $D' = 0,9(12x + 15y) = 10,8x + 13,5y$ — c) 59,40 €.

Correction de l'exercice 13 - Une démonstration courte

a) On développe avec l'identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

soit $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Donc

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

b) Le résultat s'écrit $2n + 1$ avec n entier : c'est, par définition, un **nombre impair**. La propriété est donc démontrée pour tous les entiers consécutifs, et non seulement sur quelques exemples.

c) Pour $n = 12$: $13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$, et $2 \times 12 + 1 = 25$ ✓. C'est bien un nombre impair.

Ce que fait le calcul littéral ici. Il remplace une infinité de vérifications numériques par un seul développement : c'est exactement ce qu'on attend d'une démonstration. Une autre méthode, aussi valable : factoriser la différence de carrés en $(n + 1 - n)(n + 1 + n) = 2n + 1$.

Réponse. a) $2n + 1$ — b) $2n + 1$ est impair pour tout entier n — c) $169 - 144 = 25 = 2 \times 12 + 1$.

Correction de l'exercice 14 - Enchaîner développement et réduction

Étape 1 : le produit. Par double distributivité,

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(2x - 3)(x + 5) = 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15$$

Étape 2 : le carré. Par l'identité remarquable,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Étape 3 : la soustraction. Le signe $-$ porte sur les **trois** termes du carré :

$$K = 2x^2 + 7x - 15 - x^2 + 2x - 1$$

En réduisant : $K = x^2 + 9x - 16$.

Le contrôle pour $x = 1$. Énoncé : $(2 - 3)(1 + 5) - 0 = -6$. Résultat : $1 + 9 - 16 = -6$ ✓. Pour $x = 0$: $(-3)(5) - 1 = -16$, et le résultat donne -16 ✓.

Le piège. Écrire $\dots - x^2 - 2x + 1$ est l'erreur la plus fréquente : on n'a alors changé le signe que du premier terme. Le plus sûr est de développer le carré entre parenthèses, puis de distribuer le signe.

Réponse. $K = x^2 + 9x - 16$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux programmes de calcul

a) Pour 3 : programme 1 donne $(3 + 4)^2 - 16 = 49 - 16 = 33$; programme 2 donne $(8 + 3) \times 3 = 33$. Pour -1 : programme 1 donne $(3)^2 - 16 = -7$; programme 2 donne $(8 - 1) \times (-1) = -7$. Les résultats coïncident sur ces deux exemples.

b) Programme 1 : $P_1(x) = (x + 4)^2 - 16$. Programme 2 : $P_2(x) = (8 + x) \times x = x^2 + 8x$.

c) On développe P_1 avec l'identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$P_1(x) = x^2 + 8x + 16 - 16 = x^2 + 8x$$

C'est exactement $P_2(x)$: les deux programmes donnent le même résultat **pour tout** nombre choisi. Les deux tests du a) ne le prouvaient pas, ce développement le prouve.

d) On utilise la forme factorisée $x(x + 8)$, car un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x + 8 = 0$$

Le résultat est donc nul pour $x = 0$ et pour $x = -8$. (Contrôle avec le programme 1 : $(-8 + 4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0 \checkmark$.)

Ce que montre le d). La forme factorisée est celle qui répond aux questions « quand est-ce nul ? » ; la forme développée sert à comparer et à calculer. Savoir passer de l'une à l'autre, c'est tout l'enjeu du chapitre.

Réponse. a) 33 et -7 dans les deux cas — b) $P_1(x) = (x + 4)^2 - 16$, $P_2(x) = x^2 + 8x$ — c) $P_1(x) = x^2 + 8x = P_2(x)$ — d) $x = 0$ ou $x = -8$.