

Plaquette 3 – Équations et inéquations simples

Automatismes — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les opérations qui conservent les solutions. On peut ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres, et multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre **non nul**.

Équation du premier degré.

$$ax + b = c \Leftrightarrow x = \frac{c - b}{a} \quad (a \neq 0)$$

Équation produit nul. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0$$

Équation $x^2 = a$.

Valeur de a	Solutions
$a > 0$	$x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
$a = 0$	$x = 0$
$a < 0$	aucune solution

Inéquation du premier degré. Mêmes gestes, avec la règle des signes :

$$\text{si } k > 0: ax < b \Leftrightarrow \frac{a}{k}x < \frac{b}{k} \quad \text{si } k < 0: \text{le sens s'inverse}$$

Écriture des solutions en intervalle.

Inéquation	Ensemble des solutions
$x \leq 3$	$] -\infty ; 3]$
$x > 3$	$] 3 ; +\infty [$
$-2 \leq x < 5$	$[-2 ; 5 [$

Le contrôle, systématique. On remplace la solution trouvée dans l'équation **de départ** : une erreur de calcul se voit immédiatement. Pour une inéquation, on teste une valeur de l'intervalle trouvé et une valeur en dehors.

⚠ Diviser par -3 transforme $\geq$ en $\leq$. C'est l'erreur la plus fréquente de la plaquette.

Correction de l'exercice 1 - Premier degré : le geste de base

La méthode du cours. On isole le terme en x , puis on divise par son coefficient :

$$ax + b = c \Leftrightarrow x = \frac{c - b}{a}$$

a) $3x = 22 - 7 = 15$, donc $x = 5$. (Contrôle : $3 \times 5 + 7 = 22$ ✓.)

b) $5x = 11 + 4 = 15$, donc $x = 3$.

c) $-2x = 1 - 9 = -8$, donc $x = \frac{-8}{-2} = 4$.

d) $4x = 2 - 5 = -3$, donc $x = -\frac{3}{4}$, c'est-à-dire $-0,75$.

Sur la forme des réponses. On laisse la solution en **fraction** quand elle n'est pas décimale : $-\frac{3}{4}$ est une valeur exacte, un arrondi n'en serait qu'une approximation. Une équation du premier degré à coefficient non nul a toujours exactement une solution.

Réponse. a) $x = 5$ — b) $x = 3$ — c) $x = 4$ — d) $x = -\frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 2 - Avec des parenthèses

La méthode. On développe les deux membres, on réduit, puis on applique

$$ax + b = c \Leftrightarrow x = \frac{c - b}{a}$$

a) $3x - 6 = 12$, donc $3x = 18$ et $x = 6$. (On pouvait aussi diviser d'abord par 3 : $x - 2 = 4$.)

b) $2x + 10 - 3 = 9$, soit $2x + 7 = 9$, donc $2x = 2$ et $x = 1$.

c) Le signe $-$ change les deux termes de la parenthèse : $5 - 2x + 2 = 3$, soit $7 - 2x = 3$, donc $-2x = -4$ et $x = 2$.

d) On développe des deux côtés : $8x - 4 = 3x + 6$. On regroupe les x à gauche et les nombres à droite : $5x = 10$, donc $x = 2$.

Contrôle du d). $4(2 \times 2 - 1) = 4 \times 3 = 12$ et $3(2 + 2) = 12$ ✓.

Le piège du c). Écrire $5 - 2x - 2 = 3$ est la faute classique : la distributivité du signe $-$ porte sur **tous** les termes de la parenthèse.

Réponse. a) $x = 6$ — b) $x = 1$ — c) $x = 2$ — d) $x = 2$.

Correction de l'exercice 3 - Équations avec des fractions

Le principe. On multiplie les deux membres par un même nombre non nul pour supprimer les dénominateurs.

a) On multiplie par 3 : $x = 15$.

b) On multiplie par 5 : $2x = 30$, donc $x = 15$.

c) Le dénominateur commun est 6 :

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{5x}{6}$$

L'équation devient $\frac{5x}{6} = 5$, donc $5x = 30$ et $x = 6$. (Contrôle : $3 + 2 = 5$ ✓.)

d) On utilise l'égalité des produits en croix :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

soit $3(x - 1) = 4(x + 2)$, c'est-à-dire $3x - 3 = 4x + 8$, donc $-11 = x$.

Contrôle du d). Pour $x = -11$: $\frac{-12}{4} = -3$ et $\frac{-9}{3} = -3$ ✓.

Attention. Les produits en croix ne s'appliquent qu'à une égalité de **deux** quotients : dans le c), il fallait d'abord additionner les fractions.

Réponse. a) $x = 15$ — b) $x = 15$ — c) $x = 6$ — d) $x = -11$.

Correction de l'exercice 4 - Une, aucune ou toutes les solutions

a) On regroupe les termes en x d'un côté :

$$7x - 4x = 12 + 3 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$$

L'équation a **une seule** solution, $x = 5$. (Contrôle : $35 - 3 = 32$ et $20 + 12 = 32 \checkmark$.)

b) On retire $2x$ aux deux membres : il reste $3 = -1$, ce qui est faux. Aucune valeur de x ne peut convenir : l'équation n'a **aucune solution**, l'ensemble des solutions est vide.

c) On développe le membre de gauche : $3x + 6 = 3x + 6$. L'égalité est vraie quel que soit x : **tous** les réels sont solutions. Ce n'est pas une équation à résoudre mais une **identité**.

Ce qu'il faut retenir. Quand les termes en x disparaissent, on ne s'est pas trompé : c'est le signe que l'équation est soit impossible (b), soit toujours vraie (c). On conclut alors en français, sans écrire de valeur de x .

Réponse. a) une solution, $x = 5$ — b) aucune solution — c) tous les réels sont solutions.

Correction de l'exercice 5 - Équation produit nul

La formule du cours.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

a) $x - 3 = 0$ donne $x = 3$; $2x + 5 = 0$ donne $x = -\frac{5}{2}$. Deux solutions : 3 et $-2,5$.

b) $x = 0$ ou $x - 7 = 0$: les solutions sont 0 et 7.

c) $4x - 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{4}$; $x + 6 = 0$ donne $x = -6$.

d) $2x + 8 = 0$ donne $x = -4$; $3x - 9 = 0$ donne $x = 3$.

Pourquoi on ne développe pas. La forme factorisée donne les solutions en deux lignes ; développée, l'équation du a) deviendrait $2x^2 - x - 15 = 0$, beaucoup plus longue à résoudre. Devant un produit égal à zéro, on ne développe **jamais**.

Le piège. La règle ne vaut que pour un produit égal à **zéro** : de $(x - 3)(2x + 5) = 1$, on ne peut rien conclure sur les facteurs.

Réponse. a) 3 et $-\frac{5}{2}$ — b) 0 et 7 — c) $\frac{1}{4}$ et -6 — d) -4 et 3.

Correction de l'exercice 6 - Factoriser d'abord, résoudre ensuite

La stratégie. Aucune de ces équations n'est du premier degré : on factorise pour obtenir un produit nul, puis on applique

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

a) Facteur commun x : $x(x - 5) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 5$.

b) Différence de deux carrés, avec $4x^2 = (2x)^2$:

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$$

donc $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$.

c) Différence de deux carrés encore, avec $a = x + 1$ et $b = 4$:

$$(x + 1)^2 - 16 = (x + 1 - 4)(x + 1 + 4) = (x - 3)(x + 5)$$

donc $x = 3$ ou $x = -5$. (Contrôle : $(3 + 1)^2 - 16 = 0 \checkmark$ et $(-5 + 1)^2 - 16 = 16 - 16 = 0 \checkmark$.)

L'erreur à éviter au a). Diviser les deux membres par x donnerait $x - 5 = 0$ et ferait **perdre la solution** $x = 0$: on ne divise jamais par une expression qui peut être nulle.

Réponse. a) 0 et 5 — b) $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$ — c) 3 et -5 .

Correction de l'exercice 7 - Les équations du type x carré égal a

La règle du cours. Pour $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a **deux** solutions :

$$x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}$$

a) $x = 7$ ou $x = -7$.

b) $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$. On garde la valeur exacte ; l'arrondi $\sqrt{5} \approx 2,24$ ne sert qu'à situer les solutions.

c) $x^2 = 0$ n'a qu'une solution : $x = 0$.

d) Un carré est toujours positif ou nul, donc aucun réel ne vérifie $x^2 = -4$: l'équation n'a **aucune solution**.

L'erreur la plus fréquente. Écrire $x = \sqrt{49} = 7$ et s'arrêter là : on oublie la solution négative. La notation $\sqrt{a}$ désigne le nombre **positif** dont le carré vaut a ; c'est l'équation, elle, qui a deux solutions opposées.

Réponse. a) 7 et -7 — b) $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ — c) 0 — d) aucune solution.

Correction de l'exercice 8 - Inéquations du premier degré

Le principe. On isole x comme dans une équation ; le sens du symbole ne change que si l'on multiplie ou divise par un **négatif**.

a) $2x \leq 6$, donc $x \leq 3$: l'ensemble des solutions est $]-\infty ; 3]$ (crochet fermé, car 3 convient).

b) $3x > 9$, donc $x > 3$: $]3 ; +\infty[$ (crochet ouvert, car 3 ne convient pas).

c) $\frac{x}{2} \geq 3$, donc $x \geq 6$: $[6 ; +\infty[$.

d) On passe x à droite et 2 à gauche : $3 < x$, c'est-à-dire $x > 3$: $]3 ; +\infty[$.

Le contrôle en deux tests. Au a), $x = 0$ donne $5 \leq 11$ ✓ et $x = 4$ donne $13 \leq 11$ faux : l'intervalle trouvé est du bon côté.

Un conseil pour le d). Déplacer l'inconnue du côté où son coefficient devient positif évite d'avoir à changer le sens de l'inégalité.

Réponse. a) $]-\infty ; 3]$ — b) $]3 ; +\infty[$ — c) $[6 ; +\infty[$ — d) $]3 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 9 - Quand le sens s'inverse

La règle décisive. Diviser les deux membres d'une inéquation par un nombre **négatif** en change le sens :

$$\text{si } k < 0: kx \geq b \Leftrightarrow x \leq \frac{b}{k}$$

a) $-3x \geq -6$. On divise par -3 , donc $\geq$ devient $\leq$: $x \leq 2$, soit $]-\infty ; 2]$.

b) On divise par -2 : $x < -5$, soit $]-\infty ; -5[$.

c) $-5x \leq -10$, on divise par -5 : $x \geq 2$, soit $[2 ; +\infty[$.

Le contrôle, indispensable ici. Au b), $x = -6$ donne $12 > 10$ ✓ ; $x = 0$ donne $0 > 10$ faux. L'intervalle est donc bien du côté des négatifs, ce qui confirme le changement de sens.

La méthode sans risque. Plutôt que de diviser par un négatif, on peut déplacer l'inconnue : dans le b), $-2x > 10$ s'écrit $0 > 10 + 2x$, puis $-10 > 2x$ et enfin $x < -5$. Aucun changement de sens à gérer.

Réponse. a) $]-\infty ; 2]$ — b) $]-\infty ; -5[$ — c) $[2 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 10 - L'erreur à corriger

a) Pour $x = 0$: l'inéquation de départ donne $0 > 12$, ce qui est **faux** ; la conclusion de l'élève, elle, donne $0 > -3$, ce qui est **vrai**. Une valeur ne peut pas être solution d'un côté et pas de l'autre : la conclusion est donc fausse.

b) L'élève a divisé par un nombre négatif sans changer le sens de l'inégalité. La règle du cours est :

$$\text{si } k < 0: kx > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{k}$$

Ici $-4x > 12$ donne $x < \frac{12}{-4}$, c'est-à-dire $x < -3$. L'ensemble des solutions est $]-\infty; -3[$.

Contrôle. $x = -4$ donne $16 > 12$ ✓ ; $x = -3$ donne $12 > 12$ faux (le crochet est bien ouvert) ; $x = 0$ est exclu ✓.

La méthode de vérification à systématiser. Tester une seule valeur bien choisie, comme $x = 0$, repère immédiatement une inéquation résolue « à l'envers ».

Réponse. a) $x = 0$ n'est pas solution alors que la conclusion de l'élève l'accepte — b) il manque le changement de sens : $x < -3$, soit $]-\infty; -3[$.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux forfaits

a) Le coût est la somme de l'abonnement et des minutes :

$$C_A(t) = 15 + 0,20t$$

Le forfait B, lui, coûte 25 € quel que soit t .

b) Le forfait B est plus avantageux lorsque $C_A(t) > 25$, c'est-à-dire

$$15 + 0,20t > 25 \Leftrightarrow 0,20t > 10 \Leftrightarrow t > 50$$

Au-delà de 50 minutes par mois, le forfait B coûte moins cher. À exactement 50 minutes, les deux forfaits coûtent 25 € : c'est le point d'équilibre.

c) Pour $t = 40$: $C_A(40) = 15 + 8 = 23$ €, donc le forfait A est préférable. Pour deux heures, soit $t = 120$: $C_A(120) = 15 + 24 = 39$ €, contre 25 € pour B — le forfait B fait économiser 14 €.

Ce que traduit l'inéquation. Le seuil de 50 minutes est la frontière entre deux décisions : une inéquation ne donne pas un nombre isolé mais l'**ensemble** des situations où un choix est le bon.

Réponse. a) $C_A(t) = 15 + 0,20t$ — b) au-delà de 50 minutes — c) forfait A pour 40 min (23 €), forfait B pour 120 min (25 € contre 39 €).

Correction de l'exercice 12 - Un problème d'âges

a) On appelle x le nombre d'années à attendre. Dans x années, Paul aura $14 + x$ ans et son père $42 + x$ ans. La condition « le double » se traduit par l'équation

$$42 + x = 2(14 + x)$$

On développe : $42 + x = 28 + 2x$, donc $42 - 28 = 2x - x$, soit $x = 14$.

Contrôle. Dans 14 ans, Paul aura 28 ans et son père 56 ans, et $56 = 2 \times 28$ ✓.

b) On cherche x (positif ou négatif) tel que $42 + x = 3(14 + x)$:

$$42 + x = 42 + 3x \Leftrightarrow 0 = 2x \Leftrightarrow x = 0$$

C'est **aujourd'hui** : $42 = 3 \times 14$. Le père a donc le triple de l'âge de son fils cette année même.

Le point de méthode. Une inconnue bien choisie — ici le **nombre d'années**, et non un âge — donne une équation du premier degré immédiate. Un x négatif aurait désigné une date passée, ce qui reste interprétable.

Réponse. a) dans 14 ans (28 et 56 ans) — b) oui, aujourd'hui : $42 = 3 \times 14$.

Correction de l'exercice 13 - Mise en équation géométrique

a) On note x la largeur, en centimètres ; la longueur vaut alors $x + 7$. La formule du périmètre d'un rectangle est

$$P = 2(L + \ell)$$

d'où l'équation $2((x + 7) + x) = 46$, soit $2(2x + 7) = 46$, puis $4x + 14 = 46$. On obtient $4x = 32$, donc $x = 8$.

La largeur mesure 8 cm et la longueur $8 + 7 = 15$ cm. **Contrôle** : $2(15 + 8) = 46$ ✓.

b) L'aire vaut

$$A = L \times \ell = 15 \times 8 = 120$$

soit 120 cm².

c) Un carré de largeur 8 cm a ses quatre côtés égaux à 8 cm : il faudrait réduire la longueur de $15 - 8 = 7$ cm — ce qui est exactement l'écart donné par l'énoncé.

Le réflexe de rédaction. On précise toujours ce que désigne l'inconnue et dans quelle unité ; sans cette phrase, l'équation n'a pas de sens et la réponse n'est pas interprétable.

Réponse. a) largeur 8 cm, longueur 15 cm — b) 120 cm² — c) de 7 cm.

Correction de l'exercice 14 - Deux inconnues, deux équations

Mise en équations. On note c le prix d'un croissant et p celui d'un pain au chocolat, en euros. L'énoncé donne le système

$$\begin{cases} 3c + 2p = 5,40 \\ 5c + 4p = 9,60 \end{cases}$$

Méthode par combinaison. On multiplie la première équation par 2 pour faire apparaître $4p$ dans les deux :

$$\begin{cases} 6c + 4p = 10,80 \\ 5c + 4p = 9,60 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde de la première, les termes en p disparaissent : $c = 1,20$.

Retour à la première équation. $3 \times 1,20 + 2p = 5,40$, soit $3,60 + 2p = 5,40$, donc $2p = 1,80$ et $p = 0,90$.

Contrôle dans la seconde équation. $5 \times 1,20 + 4 \times 0,90 = 6 + 3,60 = 9,60$ ✓.

Conclusion en français. Un croissant coûte 1,20 € et un pain au chocolat 0,90 €.

Pourquoi la combinaison ici. Les coefficients de p (2 et 4) sont multiples l'un de l'autre : une seule multiplication suffit à les égaliser. Par substitution, il aurait fallu exprimer $p = \frac{5,40 - 3c}{2}$, ce qui est plus lourd.

Réponse. Un croissant : 1,20 € ; un pain au chocolat : 0,90 €.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : seuil de rentabilité

a) On résout l'équation du premier degré :

$$840 + 2,5x = 6x \Leftrightarrow 840 = 3,5x \Leftrightarrow x = \frac{840}{3,5} = 240$$

Pour 240 exemplaires, la recette égale le coût : c'est le **seuil de rentabilité**. Les deux valent alors $6 \times 240 = 1\,440$ €.

b) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 6x - (840 + 2,5x) = 3,5x - 840$$

Le signe $-$ change les deux termes de la parenthèse ; B est une fonction affine de coefficient directeur 3,5 : chaque exemplaire vendu rapporte 3,50 € de bénéfice supplémentaire.

c) On résout l'inéquation $B(x) \geq 700$:

$$3,5x - 840 \geq 700 \Leftrightarrow 3,5x \geq 1\,540 \Leftrightarrow x \geq 440$$

Il faut donc vendre au moins 440 exemplaires. **Contrôle** : $B(440) = 1\,540 - 840 = 700$ ✓.

d) $B(x) < 0$ équivaut à $3,5x < 840$, soit $x < 240$: en dessous du seuil de rentabilité, l'éditeur perd de l'argent. Pour $x = 100$ exemplaires, par exemple, $B(100) = 350 - 840 = -490$ €.

Le lien entre les quatre questions. Le seuil trouvé en a) est exactement la frontière du signe de B : une équation donne un point, l'inéquation associée donne les deux zones qu'il sépare.

Réponse. a) $x = 240$, seuil de rentabilité — b) $B(x) = 3,5x - 840$ — c) au moins 440 exemplaires — d) oui, pour $x < 240$.