

Plaque 4 – Lecture graphique

Automatismes — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Image et antécédent. Si le point de coordonnées $(a; b)$ appartient à la courbe de f , alors

$$f(a) = b$$

b est l'**image** de a ; a est **un** antécédent de b . Un nombre a a au plus une image, mais il peut avoir plusieurs antécédents — ou aucun.

Lecture	On part de	On lit
image de a	l'axe des abscisses	l'ordonnée du point de la courbe
antécédents de b	l'axe des ordonnées	les abscisses des points d'ordonnée b

Résoudre graphiquement.

Question	Sur le graphique
$f(x) = k$	abscisses des points d'ordonnée k
$f(x) \geq k$	abscisses des points au-dessus de $y = k$
$f(x) = g(x)$	abscisses des points d'intersection
$f(x) > g(x)$	là où C_f est au-dessus de C_g
$f(x) = 0$	abscisses des points sur l'axe des abscisses

Variations et extremums. f est croissante sur un intervalle si sa courbe y « monte » de gauche à droite. Le **maximum** de f sur un intervalle est la plus grande ordonnée atteinte ; on précise toujours **en quelle abscisse** il est atteint.

Droite. Une droite non verticale a une équation $y = mx + p$, où

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

est son coefficient directeur et p son ordonnée à l'origine.

Taux de variation moyen de f entre a et b : c'est le coefficient directeur de la **sécante**,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

⚠ Une lecture graphique donne une valeur **approchée** dès que le point n'est pas sur un nœud du quadrillage : on l'annonce (« environ 2,3 ») et on la confirme par le calcul quand la formule est connue.

Correction de l'exercice 1 - Images et antécédents sur une parabole

a) On part de l'abscisse et on lit l'ordonnée du point de la courbe :

$$f(a) = b \Leftrightarrow \text{le point } (a; b) \text{ appartient à } C_f$$

On lit $f(0) = 3$, $f(2) = -1$ et $f(4) = 3$. Le calcul confirme : $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$ ✓.

b) On part cette fois de l'axe des ordonnées. La courbe coupe l'axe des abscisses (droite $y = 0$) en $x = 1$ et $x = 3$: les antécédents de 0 sont 1 et 3. La droite horizontale $y = 3$ coupe la courbe en $x = 0$ et $x = 4$: les antécédents de 3 sont 0 et 4.

c) La droite $y = -1$ ne touche la courbe qu'en son point le plus bas, d'abscisse 2 : le nombre -1 a **un seul** antécédent. La droite $y = -3$ passe entièrement sous la courbe : -3 n'a **aucun** antécédent.

Ce que montre le c). Un nombre a toujours au plus une image, mais le nombre de ses antécédents dépend de la hauteur à laquelle on coupe la courbe : deux, un, ou aucun.

Réponse. a) $f(0) = 3$, $f(2) = -1$, $f(4) = 3$ — b) antécédents de 0 : 1 et 3 ; de 3 : 0 et 4 — c) -1 en a un seul, -3 aucun.

Correction de l'exercice 2 - Lire l'équation d'une droite

a) L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'abscisse 0 : la droite coupe l'axe des ordonnées en -3 , donc $p = -3$.

b) La formule du cours donne le coefficient directeur à partir de deux points :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - (-3)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

Autrement dit, quand on avance de 1 vers la droite, on monte de 2 : c'est ce qu'on lit sur le quadrillage.

c) Une droite non verticale a une équation de la forme $y = mx + p$, donc ici

$$y = 2x - 3$$

Graphiquement, la droite horizontale $y = 5$ coupe d au point d'abscisse 4. **Par le calcul** : $2x - 3 = 5$ donne $2x = 8$, soit $x = 4$ ✓. Les deux méthodes concordent.

Le contrôle utile. On vérifie que les deux points donnés vérifient l'équation : $2 \times 0 - 3 = -3$ ✓ et $2 \times 2 - 3 = 1$ ✓.

Réponse. a) $p = -3$ — b) $m = 2$ — c) $y = 2x - 3$, et $f(x) = 5$ pour $x = 4$.

Correction de l'exercice 3 - Deux droites qui se croisent

a) Les deux droites se coupent au point de coordonnées $(4 ; 3)$: on lit l'abscisse 4 et l'ordonnée 3 sur le quadrillage.

b) Résoudre $f(x) = g(x)$, c'est résoudre

$$-x + 7 = 0,5x + 1$$

On regroupe : $7 - 1 = 0,5x + x$, soit $6 = 1,5x$, donc $x = 4$. L'ordonnée commune vaut alors $f(4) = 3$, ce qui confirme la lecture du a). C'est le principe général : les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les **abscisses** des points d'intersection des deux courbes.

c) $f(x) > g(x)$ se lit là où d_1 est **au-dessus** de d_2 , c'est-à-dire pour x compris entre 0 et 4 : l'ensemble des solutions sur l'intervalle d'étude est $[0 ; 4[$.

Interprétation en contexte. Avant le quatrième mois, la première formule coûte plus cher que la seconde ; au bout de quatre mois les deux coûtent 30 €, et ensuite la première devient la moins chère.

Réponse. a) $(4 ; 3)$ — b) $x = 4$, d'ordonnée 3 — c) $[0 ; 4[$.

Correction de l'exercice 4 - Dresser un tableau de variations

a) On lit le sens de parcours de la courbe de gauche à droite.

— La vitesse **augmente** sur $[0 ; 2]$ (de 0 à 25 km/h) et sur $[7 ; 9]$ (de 10 à 30 km/h).

- Elle **diminue** sur $[5 ; 7]$ et sur $[9 ; 12]$.
- Elle est **constante** sur $[2 ; 5]$, égale à 25 km/h.

b) Le tableau de variations résume ces lectures : on y porte les bornes et les valeurs atteintes.

t	0	2	5	7	9	12
$v(t)$	0	25	25	10	30	0
variation	croissante	constante	décroissante	croissante	décroissante	—

c) La plus grande ordonnée atteinte est 30 km/h, à l'instant $t = 9$ minutes. On écrit : le maximum de v sur $[0 ; 12]$ vaut 30, atteint en $t = 9$.

La rédaction attendue. Un extremum s'annonce toujours avec **deux** informations : sa valeur (30 km/h) et l'abscisse où il est atteint ($t = 9$ min). Dire « le maximum est 9 » est une confusion entre l'abscisse et l'ordonnée.

Réponse. a) croissante sur $[0 ; 2]$ et $[7 ; 9]$, décroissante sur $[5 ; 7]$ et $[9 ; 12]$, constante sur $[2 ; 5]$ — c) maximum 30 km/h atteint à $t = 9$ min.

Correction de l'exercice 5 - Températures d'une journée

a) On lit l'ordonnée des points d'abscisses 10 et 18 : $T(10) = 24$ °C et $T(18) = 24$ °C. Les deux valeurs sont égales, ce qui se voit à la symétrie de la courbe.

b) Le point le plus haut de la courbe a pour coordonnées (14 ; 26) : la température maximale est de 26 °C, atteinte à 14 h.

c) On cherche les abscisses des points situés **au-dessus** de la droite horizontale $y = 24$:

$$T(t) \geq 24 \Leftrightarrow t \in [10 ; 18]$$

La température dépasse 24 °C entre 10 h et 18 h, soit pendant 8 heures.

Pourquoi la réponse est un intervalle. La question « à quelle heure fait-il 24 °C ? » a deux réponses (10 h et 18 h) ; la question « quand fait-il au moins 24 °C ? » a pour réponse tout l'intervalle qu'elles délimitent. C'est la différence entre une équation et une inéquation, lue sur le graphique.

Réponse. a) 24 °C à 10 h et à 18 h — b) maximum 26 °C à 14 h — c) sur $[10 ; 18]$, soit de 10 h à 18 h.

Correction de l'exercice 6 - Lire le signe d'une fonction

a) Les solutions de $p(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses : on lit $x = -2$ et $x = 3$.

Contrôle par le calcul : p se factorise en $(x + 2)(x - 3)$, et

$$(x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3$$

b) $p(x) \leq 0$ se lit là où la courbe est **au-dessous** de l'axe des abscisses (ou sur cet axe) : l'ensemble des solutions est $[-2 ; 3]$.

c) Le tableau de signes reprend cette lecture.

x	-4	-2	3	5
signe de $p(x)$	+	0	0	+
position	au-dessus	sur l'axe	au-dessous entre les deux	au-dessus

Entre -2 et 3, $p(x)$ est négatif ; à l'extérieur, positif.

À retenir. Une parabole tournée vers le haut est négative **entre** ses deux racines et positive à l'extérieur. La lecture graphique donne la réponse en une seconde, à condition de repérer d'abord les racines.

Réponse. a) $x = -2$ et $x = 3$ — b) $[-2; 3]$ — c) positif sur $[-4; -2]$ et $[3; 5]$, négatif sur $[-2; 3]$.

Correction de l'exercice 7 - Combien de solutions ?

La méthode. On trace mentalement la droite horizontale $y = k$ et on compte ses points d'intersection avec la courbe :

$$q(x) = k \Leftrightarrow \text{abscisses des points de } C_q \text{ d'ordonnée } k$$

a) $k = 0$: la droite coupe la courbe en deux points, d'abscisses 1 et 5. Deux solutions. (Contrôle : $q(x) = -(x-1)(x-5)$.)

b) $k = 4$: la droite est tangente au sommet $S(3; 4)$: une seule solution, $x = 3$.

c) $k = 5$: la droite $y = 5$ passe entièrement **au-dessus** de la courbe, dont l'ordonnée maximale est 4 : aucune solution.

d) $k = -5$: la droite coupe la courbe aux deux extrémités du graphique, en $x = 0$ et $x = 6$. Contrôle par le calcul :

$$-x^2 + 6x - 5 = -5 \Leftrightarrow -x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(6 - x) = 0$$

donc $x = 0$ ou $x = 6$ ✓.

Ce que gouverne le sommet. Ici l'ordonnée maximale vaut 4 : l'équation $q(x) = k$ a deux solutions pour $k < 4$, une seule pour $k = 4$, aucune pour $k > 4$. Le sommet sépare les trois cas.

Réponse. a) deux solutions, 1 et 5 — b) une seule, $x = 3$ — c) aucune — d) deux, 0 et 6.

Correction de l'exercice 8 - Taux de variation moyen lu sur une courbe

a) On lit $h(2) = 2$ cm et $h(4) = 8$ cm. Le calcul confirme : $0,5 \times 4 = 2$ et $0,5 \times 16 = 8$ ✓.

b) La formule du cours donne le taux de variation moyen entre a et b :

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{8 - 2}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Entre la deuxième et la quatrième minute, la hauteur augmente en moyenne de 3 cm par minute. Ce nombre est aussi le **coefficient directeur de la sécante** (AB) tracée sur la figure.

c) Entre 0 et 2 : $\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$, soit 1 cm par minute seulement. Le remplissage **s'accélère** : la courbe monte de plus en plus vite, ce qui se voit à son creux vers le haut.

Le sens de la lecture. Un taux de variation moyen n'est pas une vitesse instantanée : c'est la pente de la corde entre deux points. Deux intervalles différents donnent deux pentes différentes dès que la courbe n'est pas une droite.

Réponse. a) $h(2) = 2$ cm, $h(4) = 8$ cm — b) taux 3 cm/min, pente de (AB) — c) 1 cm/min entre 0 et 2 : le remplissage s'accélère.

Correction de l'exercice 9 - Coût, recette et bénéfice

a) L'activité est rentable lorsque la recette dépasse le coût, c'est-à-dire là où la droite R est **au-dessus** de la droite C. Les deux se croisent au point (10; 35) : à partir de 10 objets, l'artisan gagne de l'argent. C'est le seuil de rentabilité.

b) Pour $x = 20$, on lit $R(20) = 70$ € et $C(20) = 50$ € ; l'écart vertical entre les deux droites vaut 20 €. Par le calcul, le bénéfice est

$$B(x) = R(x) - C(x) = 3,5x - (20 + 1,5x) = 2x - 20$$

donc $B(20) = 40 - 20 = 20$ € ✓.

c) On résout l'inéquation $B(x) \geq 30$:

$$2x - 20 \geq 30 \Leftrightarrow 2x \geq 50 \Leftrightarrow x \geq 25$$

Il faut fabriquer et vendre au moins 25 objets. **Contrôle graphique** : pour $x = 25$, on lit $R = 87,5$ € et $C = 57,5$ €, soit bien 30 € d'écart.

Le lien graphique-calcul. Le seuil lu en a) est l'abscisse du point d'intersection, donc la solution de $R(x) = C(x)$, c'est-à-dire de $B(x) = 0$: $2x - 20 = 0$ donne $x = 10$ ✓.

Réponse. a) à partir de 10 objets — b) 20 € de bénéfice, avec $B(x) = 2x - 20$ — c) au moins 25 objets.

Correction de l'exercice 10 - Un tarif par paliers

a) On lit les ordonnées des points d'abscisses 2, 3,5 et 6 : $P(2) = 4$ €, $P(3,5) = 7$ € et $P(6) = 8$ €.

Sur l'intervalle $[0; 4]$, le graphique est un segment de droite passant par l'origine, de coefficient directeur

$$m = \frac{8 - 0}{4 - 0} = 2$$

donc $P(t) = 2t$: chaque heure coûte 2 €. Le calcul redonne $P(3,5) = 7$ € ✓.

b) On cherche les abscisses des points d'ordonnée inférieure ou égale à 5 : $2t \leq 5$ donne $t \leq 2,5$. Avec 5 €, on peut stationner 2 h 30 au maximum.

c) À partir de $t = 4$ heures, le graphique est **horizontal** : le prix reste égal à 8 € quelle que soit la durée. C'est un forfait journalier — au-delà de quatre heures, rester plus longtemps ne coûte rien de plus.

Lecture d'un graphique en deux morceaux. Chaque morceau a sa propre règle : proportionnalité jusqu'à 4 h (droite passant par l'origine), prix constant ensuite. On précise donc toujours **sur quel intervalle** on lit.

Réponse. a) 4 €, 7 € et 8 € — b) 2 h 30 — c) à partir de 4 heures, le prix reste à 8 €.

Correction de l'exercice 11 - Comparer une courbe et une droite

a) Les deux courbes se coupent en deux points, d'abscisses 0 et 3 (leurs ordonnées sont respectivement -3 et 0).

b) Résoudre $f(x) = g(x)$ revient à résoudre

$$x^2 - 2x - 3 = x - 3$$

On ramène tout d'un côté : $x^2 - 3x = 0$, puis on factorise par x :

$$x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

Ce sont bien les deux abscisses lues ✓.

c) $f(x) \leq g(x)$ se lit là où la parabole est **au-dessous** de la droite : entre les deux points d'intersection. L'ensemble des solutions est $[0; 3]$.

Le réflexe pour ce type de question. On ne compare jamais deux courbes « à vue » sur tout le graphique : on cherche d'abord les points d'intersection, qui découpent l'intervalle d'étude en zones où une seule des deux est au-dessus. Ici trois zones : $[-2; 0]$, $[0; 3]$ et $[3; 5]$.

Réponse. a) $x = 0$ et $x = 3$ — b) $x(x - 3) = 0$ — c) $[0 ; 3]$.

Correction de l'exercice 12 - Croissance d'une plante

a) On lit l'ordonnée du point d'abscisse 4 : $h(4) = 8$ cm. Le calcul confirme, puisque $4\sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$ ✓.

b) On part de l'ordonnée 12 et on lit l'abscisse correspondante : $t = 9$ semaines.
Contrôle : $4\sqrt{9} = 12$ ✓.

c) Graphiquement, la courbe atteint 6 cm un peu après la deuxième semaine, vers $t \approx 2,3$.
Par le calcul :

$$4\sqrt{t} = 6 \Rightarrow \sqrt{t} = 1,5 \Rightarrow t = 1,5^2 = 2,25$$

soit 2,25 semaine, ce qui est cohérent avec la lecture.

d) On compare deux taux de variation moyens :

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a}$$

— entre 0 et 1 : $\frac{4 - 0}{1} = 4$ cm par semaine ;

— entre 4 et 9 : $\frac{12 - 8}{5} = 0,8$ cm par semaine.

La croissance **ralentit** nettement : la plante grandit cinq fois moins vite en fin de période. C'est ce que traduit l'allure de la courbe, qui s'aplatit.

La rédaction attendue au c). Une valeur lue est approchée : on écrit « environ 2,3 » et non « 2,3 » ; c'est le calcul qui donne la valeur exacte 2,25.

Réponse. a) 8 cm — b) 9 semaines — c) environ 2,3, exactement 2,25 semaine — d) elle ralentit : 4 cm/semaine puis 0,8 cm/semaine.

Correction de l'exercice 13 - L'erreur à corriger

a) **Première affirmation.** La droite $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, coupe la courbe en **deux** points, d'abscisses -2 et 2 . Le nombre 0 a donc deux antécédents, et non un seul : dire « l'antécédent » au singulier fait perdre la solution $x = 2$.

Seconde affirmation. L'élève a inversé les deux rôles. Le point de la courbe d'abscisse 4 a pour ordonnée 6 : c'est 6 qui est l'**image** de 4, et 4 qui est un **antécédent** de 6.

b) Avec la notation du cours,

$$u(a) = b \Leftrightarrow \text{le point } (a ; b) \text{ appartient à } C_u$$

on écrit : $u(-2) = 0$ et $u(2) = 0$ pour la première affirmation, $u(4) = 6$ pour la seconde.

Contrôle par le calcul. $u(-2) = 0,5 \times 4 - 2 = 0$ ✓, $u(2) = 0$ ✓, $u(4) = 0,5 \times 16 - 2 = 6$ ✓.

Le moyen mnémotechnique. Dans $u(4) = 6$, le nombre **entre parenthèses** est l'antécédent, celui qui est **après le signe égal** est l'image. L'image se calcule, les antécédents se cherchent.

Réponse. a) 0 a deux antécédents, -2 et 2 ; et c'est 6 qui est l'image de 4 — b) $u(-2) = 0$, $u(2) = 0$ et $u(4) = 6$.

Correction de l'exercice 14 - Du graphique au calcul

a) Les deux points d'intersection ont pour abscisses -2 et 4 ; leurs ordonnées valent 2 et 8.

b) On résout l'équation $f(x) = x + 4$:

$$\frac{x^2}{2} = x + 4$$

On multiplie les deux membres par 2 : $x^2 = 2x + 8$, soit $x^2 - 2x - 8 = 0$. On reconnaît une expression qui se factorise :

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

En effet $(x - 4)(x + 2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$ ✓. Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est, donc $x = 4$ ou $x = -2$: les lectures du a) sont exactes.

c) L'inégalité $\frac{x^2}{2} > x + 4$ se lit là où la **parabole est au-dessus de la droite**, c'est-à-dire à l'extérieur des deux points d'intersection : sur $[-4; -2[$ et sur $]4; 5]$ dans la fenêtre représentée.

Ce qu'apporte le calcul. La lecture graphique donne les valeurs, le calcul les **certifie** : un point d'intersection qui « tombe » sur un nœud du quadrillage peut n'être qu'une apparence, à 0,05 près. On lit, puis on vérifie.

Réponse. a) -2 et 4 — b) $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2) = 0$ — c) $[-4; -2[\cup]4; 5]$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un enclos rectangulaire

a) Le périmètre du rectangle vaut 40 m, donc

$$2(L + \ell) = 40 \Leftrightarrow L + \ell = 20$$

Si la largeur est x , la longueur est donc $20 - x$, et l'aire du rectangle vaut

$$A = L \times \ell = x(20 - x)$$

ce qui est bien l'expression donnée.

b) On lit $A(4) = 64 \text{ m}^2$. La droite horizontale $y = 64$ coupe la courbe en deux points, d'abscisses 4 et 16 : les antécédents de 64 sont 4 et 16.

c) Le point le plus haut de la courbe est $S(10; 100)$: l'aire maximale vaut 100 m^2 , atteinte pour une largeur de 10 m. La longueur vaut alors $20 - 10 = 10 \text{ m}$: l'enclos est un **carré**.

d) $A(x) \geq 64$ se lit là où la courbe est au-dessus de la droite $y = 64$, soit $x \in [4; 16]$. Autrement dit, toute largeur comprise entre 4 m et 16 m donne au moins 64 m^2 d'enclos ; en dehors, l'enclos est trop étroit ou trop allongé.

e) Par le calcul, $x(20 - x) = 64$ s'écrit $20x - x^2 = 64$, soit $x^2 - 20x + 64 = 0$. Cette expression se factorise :

$$x^2 - 20x + 64 = (x - 4)(x - 16)$$

car $(x - 4)(x - 16) = x^2 - 16x - 4x + 64$ ✓. Les solutions sont donc exactement 4 et 16, comme lu au b).

La conclusion à retenir. À périmètre fixé, c'est le carré qui donne la plus grande aire — et le graphique le montre d'un coup d'œil : la courbe est symétrique, son sommet correspond à $L = \ell$.

Réponse. a) $L = 20 - x$ donc $A(x) = x(20 - x)$ — b) $A(4) = 64 \text{ m}^2$, antécédents de 64 : 4 et 16 — c) maximum 100 m^2 pour $x = 10 \text{ m}$, l'enclos est un carré — d) $[4; 16]$ — e) $(x - 4)(x - 16) = 0$.