

Plaquette 5 – Synthèse : automatismes mixtes

Automatismes — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fractions. Même dénominateur avant d'additionner ; pour multiplier, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Puissances. Pour $a \neq 0$ et m, n entiers :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Écriture scientifique d'un nombre : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Racines carrées. Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Proportionnalité. Quatrième proportionnelle par produits en croix :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Moyenne pondérée de valeurs x_i affectées des coefficients n_i :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

Vitesse moyenne : $v = \frac{d}{t}$ — c'est la distance **totale** divisée par la durée **totale**, jamais la moyenne des vitesses.

Unités usuelles.

Grandeur	À connaître
aire	1 ha = 10 000 m ² , 1 a = 100 m ²
volume	1 m ³ = 1 000 L, 1 dm ³ = 1 L
échelle 1 / n	1 cm sur le plan représente n cm en vrai

Pourcentages, littéral, équations, graphiques : les formules des plaquettes 1 à 4 restent valables et sont rappelées au fil des corrigés.

Correction de l'exercice 1 – Calculs à mener de tête

a) Le dénominateur commun de 3 et 4 est 12 :

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

Comme 11 est premier, la fraction est irréductible.

b) On multiplie numérateurs et dénominateurs, en simplifiant avant de calculer :

$$\frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{2 \times 10}{5 \times 3} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

c) La règle des puissances de même base donne

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

donc $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$. (On n'additionne pas les bases : le résultat n'est pas 4^7 .)

d) On extrait le plus grand carré parfait contenu dans 50, ici 25 :

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Le réflexe commun aux quatre. On simplifie **avant** de calculer : dénominateur commun le plus petit, simplification des fractions, somme des exposants, extraction du carré parfait. C'est ce qui rend ces calculs faisables sans calculatrice.

Réponse. a) $\frac{11}{12}$ — b) $\frac{4}{3}$ — c) 128 — d) $5\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Puissances de dix et ordre de grandeur

a) On regroupe les nombres d'un côté, les puissances de dix de l'autre, puis on applique

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

soit $3 \times 4 = 12$ et $10^5 \times 10^{-2} = 10^3$, donc 12×10^3 . L'écriture scientifique demande un facteur entre 1 et 10 :

$$12 \times 10^3 = 1,2 \times 10^4$$

b) On divise les nombres et on soustrait les exposants :

$$\frac{6 \times 10^8}{2 \times 10^3} = 3 \times 10^{8-3} = 3 \times 10^5$$

c) On déplace la virgule de quatre rangs vers la droite, donc l'exposant est -4 :
 $0,00042 = 4,2 \times 10^{-4}$.

d) On remplace chaque facteur par son ordre de grandeur : $4,2 \times 10^{-4} \approx 4 \times 10^{-4}$ et $2\,900\,000 = 2,9 \times 10^6 \approx 3 \times 10^6$. Le produit vaut environ

$$4 \times 3 \times 10^{-4+6} = 12 \times 10^2 \approx 10^3$$

soit environ un millier. (La valeur exacte est 1 218 : l'ordre de grandeur était correct.)

À quoi cela sert. L'ordre de grandeur se calcule de tête et détecte une erreur de calculatrice : un résultat annoncé à 121,8 ou à 12 180 serait immédiatement suspect.

Réponse. a) $1,2 \times 10^4$ — b) 3×10^5 — c) $4,2 \times 10^{-4}$ — d) environ 10^3 , c'est-à-dire un millier.

Correction de l'exercice 3 - Proportionnalité : adapter une recette

a) Les quantités sont proportionnelles au nombre de personnes. Le coefficient est $\frac{15}{6} = 2,5$, donc

$$450 \times 2,5 = 1\,125 \quad \text{et} \quad 9 \times 2,5 = 22,5$$

Il faut 1 125 g de farine et 22,5 cL de lait.

b) On cherche la quatrième proportionnelle par produits en croix :

$$\frac{450}{6} = \frac{600}{n} \Leftrightarrow 450n = 3\,600 \Leftrightarrow n = 8$$

Avec 600 g de farine, on prépare la recette pour 8 personnes.

c) On compare les **prix au kilogramme** : le paquet donne 1,60 € le kg, le sac donne $\frac{7,25}{5} = 1,45$ € le kg. Le sac de 5 kg est donc plus avantageux, de 0,15 € par kilogramme.

La méthode générale du c). Pour comparer deux offres de contenances différentes, on ramène toujours à la **même unité** : prix au kg, au litre, à l'unité. Comparer 1,60 € et 7,25 € n'a aucun sens.

Réponse. a) 1 125 g de farine et 22,5 cL de lait — b) 8 personnes — c) le sac de 5 kg (1,45 € le kg contre 1,60 €).

Correction de l'exercice 4 - Une moyenne avec des coefficients

a) La formule du cours pour une moyenne pondérée :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

Ici le numérateur vaut $2 \times 12 + 1 \times 15 + 3 \times 8 = 24 + 15 + 24 = 63$, et la somme des coefficients vaut 6. Donc

$$\bar{x} = \frac{63}{6} = 10,5$$

b) La moyenne simple vaudrait $\frac{12 + 15 + 8}{3} = \frac{35}{3} \approx 11,7$. La moyenne pondérée est plus basse, car la note la plus faible (8) porte le coefficient le plus élevé (3) : elle « compte » pour trois devoirs.

c) On note x la note cherchée. Le total des points devient $63 + 2x$ et la somme des coefficients 8. La condition s'écrit

$$\frac{63 + 2x}{8} = 11 \Leftrightarrow 63 + 2x = 88 \Leftrightarrow 2x = 25 \Leftrightarrow x = 12,5$$

Il lui faut 12,5 sur 20. **Contrôle** : $\frac{63 + 25}{8} = \frac{88}{8} = 11 \checkmark$.

Ce que montre le c). Une question de moyenne se transforme en équation du premier degré dès qu'on nomme la note inconnue : c'est l'automatisme à avoir.

Réponse. a) 10,5 — b) non, la moyenne simple vaut environ 11,7 : la note la plus basse a le plus fort coefficient — c) 12,5.

Correction de l'exercice 5 - Le piège de la vitesse moyenne

a) De la formule de la vitesse moyenne on tire la durée :

$$v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$$

— première portion : $t_1 = \frac{60}{30} = 2$ heures ;

— seconde portion : $t_2 = \frac{60}{60} = 1$ heure.

La durée totale est donc $t = 3$ heures.

b) La vitesse moyenne se calcule sur la distance **totale** et la durée **totale** :

$$v = \frac{120}{3} = 40$$

soit 40 km/h.

c) 45 km/h serait la moyenne des deux vitesses, mais cette moyenne n'a pas de sens ici : l'automobiliste passe **deux heures** à 30 km/h et seulement **une heure** à 60 km/h. La vitesse lente pèse deux fois plus lourd. On retrouve 40 km/h comme moyenne pondérée par les durées :

$$\frac{2 \times 30 + 1 \times 60}{3} = \frac{120}{3} = 40$$

La règle à retenir. Une vitesse moyenne ne se moyenne pas : on additionne les distances, on additionne les durées, puis on divise. C'est le même piège que l'addition des taux d'évolution.

Réponse. a) 2 h et 1 h, soit 3 h — b) 40 km/h — c) parce que les deux vitesses ne sont pas tenues pendant la même durée.

Correction de l'exercice 6 - Hausse puis baisse du même taux

a) Les coefficients multiplicateurs se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = 1,08 \times 0,92 = 0,9936$$

Le prix final vaut donc $0,9936 p$.

b) Non : $0,9936 p < p$. Le taux global est

$$t = (0,9936 - 1) \times 100 = -0,64$$

soit une baisse de 0,64 %.

c) Notons $x = \frac{t}{100}$. Le coefficient global est $(1 + x)(1 - x)$, et l'identité remarquable du cours donne

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$$

Comme $x \neq 0$, on a $x^2 > 0$, donc $1 - x^2 < 1$: le coefficient global est **toujours** inférieur à 1, c'est donc toujours une baisse, quel que soit le taux t .

Ce que le littéral apporte ici. Le calcul du a) traite un cas ; l'identité du c) traite tous les cas d'un coup, et explique en plus pourquoi la perte est faible quand t est petit : elle vaut x^2 , soit 0,0064 pour $t = 8$.

Réponse. a) $0,9936 p$ — b) non, baisse de 0,64 % — c) le coefficient global vaut $1 - x^2 < 1$.

Correction de l'exercice 7 - Un partage à mettre en équation

Le choix de l'inconnue. On note x la part du premier associé, en euros. Les deux autres s'expriment alors en fonction de x :

- deuxième associé : $x + 12$;
- troisième associé : $2x$.

La mise en équation. La somme des trois parts vaut 156 € :

$$x + (x + 12) + 2x = 156$$

La résolution. On réduit le membre de gauche : $4x + 12 = 156$, donc $4x = 144$ et

$$x = \frac{144}{4} = 36$$

Les trois parts. Le premier reçoit 36 €, le deuxième $36 + 12 = 48$ €, le troisième $2 \times 36 = 72$ €.

Contrôle. $36 + 48 + 72 = 156$ ✓, le deuxième a bien 12 € de plus que le premier ✓ et le troisième le double du premier ✓ : les trois conditions de l'énoncé sont vérifiées.

Le point de méthode. On choisit comme inconnue la grandeur à laquelle les autres se comparent — ici la part du premier. Prendre la part du troisième aurait donné $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{2} + 12$, donc des fractions inutiles.

Réponse. 36 €, 48 € et 72 €.

Correction de l'exercice 8 - Lecture graphique express

a) On lit les ordonnées des points d'abscisses 0 et 2 : $f(0) = 3$ et $f(2) = 0$.

b) Le coefficient directeur se calcule avec deux points de la droite :

$$m = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 3}{2} = -1,5$$

L'ordonnée à l'origine est $f(0) = 3$, donc

$$f(x) = -1,5x + 3$$

Le coefficient est négatif, ce qui est cohérent : la droite descend.

c) $f(x) = 0$ a pour solution $x = 2$ — c'est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses, déjà lue au a). Par le calcul : $-1,5x + 3 = 0$ donne $1,5x = 3$, soit $x = 2$ ✓.

$f(x) > 0$ se lit là où la droite est **au-dessus** de l'axe des abscisses, c'est-à-dire pour $x < 2$: sur la fenêtre étudiée, l'ensemble des solutions est $[-1 ; 2[$.

La cohérence à vérifier. Une fonction affine de coefficient négatif est décroissante : elle est positive **avant** sa racine et négative après. Le graphique et le calcul disent la même chose, dans cet ordre-là.

Réponse. a) $f(0) = 3$, $f(2) = 0$ — b) $m = -1,5$ et $f(x) = -1,5x + 3$ — c) $x = 2$, puis $[-1 ; 2[$.

Correction de l'exercice 9 - Développer ou factoriser, au choix

a) C'est un produit de la forme $(a - b)(a + b)$, donc on **développe** avec

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

ce qui donne $x^2 - 25$.

b) Carré d'une somme, on développe avec

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

soit $(3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1 = 9x^2 + 6x + 1$.

c) C'est une somme : on **factorise**. D'abord le facteur commun 2, puis la différence de carrés :

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2)$$

d) Somme de trois termes : on cherche une identité. Les carrés sont x^2 et 3^2 , et le double produit vaut $2 \times x \times 3 = 6x$ ✓, donc

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Comment choisir. Un **produit** se développe, une **somme** se factorise. Et on factorise toujours au maximum : s'arrêter à $2(x^2 - 4)$ au c) laisse le travail inachevé.

Réponse. a) $x^2 - 25$ — b) $9x^2 + 6x + 1$ — c) $2(x - 2)(x + 2)$ — d) $(x + 3)^2$.

Correction de l'exercice 10 - Vrai ou faux, avec justification

a) **Faux.** Diviser par 2, c'est multiplier par 0,5, donc le coefficient global vaut

$$1,5 \times 0,5 = 0,75$$

soit une baisse de 25 %. Pour revenir au départ après +50 %, il faudrait diviser par 1,5, c'est-à-dire baisser de 33,3 % environ.

b) **Faux.** L'équation $x^2 = 16$ a **deux** solutions, 4 et -4, car $(-4)^2 = 16$ également. L'affirmation oublie la solution négative.

c) **Vrai.** Les coefficients se multiplient : $0,90 \times 0,90 = 0,81$, ce qui correspond à $(0,81 - 1) \times 100 = -19$, donc une remise globale de 19 % — et non de 20 %.

d) **Faux.** L'inégalité $2x > x$ équivaut à $x > 0$: elle n'est vraie que pour les nombres strictement positifs. Pour $x = -3$, le double vaut -6 , qui est **plus petit**. Contre-exemple suffisant pour conclure.

Ce que demande un « vrai ou faux ». Pour réfuter, un seul contre-exemple suffit (b, d). Pour affirmer, il faut un calcul général : au c), le produit des coefficients vaut pour n'importe quel prix de départ.

Réponse. a) faux (−25 %) — b) faux ($x = 4$ ou $x = -4$) — c) vrai (0,81) — d) faux, seulement si $x > 0$.

Correction de l'exercice 11 - Mélange de deux solutions

a) Chaque solution apporte un volume de sucre proportionnel à son volume :

$$3 \times 0,12 = 0,36 \quad \text{et} \quad 2 \times 0,07 = 0,14$$

soit 0,36 L et 0,14 L de sucre — au total 0,50 L.

b) Le mélange a un volume de $3 + 2 = 5$ L, donc sa concentration est

$$\frac{0,50}{5} = 0,10$$

soit 10 %.

c) Non : la moyenne simple vaudrait $\frac{12+7}{2} = 9,5$ %. Il faut pondérer par les volumes, car la solution la plus concentrée est aussi la plus abondante :

$$\frac{3 \times 12 + 2 \times 7}{5} = \frac{36 + 14}{5} = 10$$

La structure commune à ces problèmes. Concentration d'un mélange, moyenne de notes, vitesse moyenne : c'est toujours une **moyenne pondérée**, jamais une moyenne simple. Le poids est ici le volume, ailleurs le coefficient ou la durée.

Réponse. a) 0,36 L et 0,14 L — b) 10 % — c) non, la moyenne simple donnerait 9,5 % : il faut pondérer par les volumes.

Correction de l'exercice 12 - Échelle d'une carte

Le principe. À l'échelle $\frac{1}{n}$, une longueur de 1 cm sur la carte représente n cm en réalité :

$$\text{distance réelle} = \text{distance sur la carte} \times n$$

a) $4,6 \times 25\,000 = 115\,000$ cm. On convertit : $115\,000$ cm = 1 150 m = 1,15 km.

b) On fait le calcul inverse. 3 km = 300 000 cm, donc la longueur sur la carte vaut

$$\frac{300\,000}{25\,000} = 12$$

soit 12 cm.

c) L'échelle est le quotient de la longueur sur la carte par la longueur réelle, exprimées dans la **même unité** :

$$\frac{6}{300\,000} = \frac{1}{50\,000}$$

Cette seconde carte est à l'échelle $\frac{1}{50\,000}$: elle est deux fois moins détaillée que la première.

L'erreur à éviter. Ne jamais mélanger les unités dans un rapport d'échelle : $\frac{6 \text{ cm}}{3 \text{ km}}$ n'est pas une échelle. On convertit d'abord tout en centimètres, et l'échelle devient un nombre sans unité.

Réponse. a) 1,15 km — b) 12 cm — c) $\frac{1}{50\,000}$.

Correction de l'exercice 13 - Un terrain à clôturer

a) L'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions :

$$A = L \times \ell = 90 \times 50 = 4\,500$$

soit 4 500 m². Comme 1 ha = 10 000 m², cela fait $\frac{4\,500}{10\,000} = 0,45$ ha.

b) La clôture suit le périmètre :

$$P = 2(L + \ell) = 2(90 + 50) = 280$$

Il faut 280 m de grillage.

c) Le coût avant remise vaut $280 \times 12,50 = 3\,500$ €. Une remise de 12 % correspond au coefficient multiplicateur 0,88 :

$$3\,500 \times 0,88 = 3\,080$$

Le coût est donc de 3 080 €, soit 420 € d'économie.

Le contrôle par l'ordre de grandeur. 280 m à environ 12 € le mètre, c'est un peu plus de 3 000 € : le résultat est plausible. Ce réflexe évite l'erreur de virgule.

Ne pas confondre. L'aire sert à semer ou à bâcher, le périmètre à clôturer : la question dit laquelle des deux grandeurs calculer.

Réponse. a) 4 500 m², soit 0,45 ha — b) 280 m — c) 3 500 €, puis 3 080 € après remise.

Correction de l'exercice 14 - Quatre questions à choix unique

a) La formule du taux d'évolution donne

$$t = \frac{2\,750 - 2\,500}{2\,500} \times 100 = \frac{250}{2\,500} \times 100 = 10$$

La bonne réponse est +10 %. Le piège : 250 est l'**augmentation absolue**, pas le taux.

b) On élève chaque facteur au carré :

$$(2 \times 10^3)^2 = 2^2 \times 10^{3 \times 2} = 4 \times 10^6$$

La bonne réponse est 4×10^6 . Le piège : oublier de mettre le 2 au carré.

c) $-2x \geq 6$, puis on divise par -2 , ce qui **inverse** le sens :

$$x \leq -3$$

La bonne réponse est $x \leq -3$. Contrôle : $x = -4$ donne $9 \geq 7$ ✓.

d) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x - 1 = 0$ donne $x = 1$, et $x + 4 = 0$ donne $x = -4$. La bonne réponse est 1 et -4 . Le piège : recopier les nombres de l'énoncé sans changer leur signe.

Ce que ces quatre pièges ont en commun. Ils sanctionnent tous une lecture trop rapide : un écart pris pour un taux, un carré partiel, une division par un négatif, un signe recopié. Le calcul écrit, même court, les évite.

Réponse. a) +10 % — b) 4×10^6 — c) $x \leq -3$ — d) 1 et -4 .

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une commande en ligne

a) On additionne les prix hors taxes :

$$3 \times 24,50 + 39 = 73,50 + 39 = 112,50$$

soit 112,50 € hors taxes.

b) Une remise de 15 % correspond au coefficient 0,85 :

$$112,50 \times 0,85 = 95,625$$

soit 95,625 € hors taxes (on garde toutes les décimales pour la suite du calcul). La TVA à 20 % correspond au coefficient 1,20 :

$$95,625 \times 1,20 = 114,75$$

Les articles coûtent donc 114,75 € TTC.

c) On ajoute les frais de port, qui ne subissent pas la TVA : $114,75 + 6,90 = 121,65$ €.

d) Chaque mensualité vaut

$$\frac{121,65}{3} = 40,55$$

soit 40,55 € par mois pendant trois mois.

e) On calcule la proportion des frais de port dans le total :

$$\frac{6,90}{121,65} \approx 0,0567$$

soit environ 5,7 % du montant à payer.

L'ordre des opérations, qui compte. Remise puis TVA donne le même résultat que TVA puis remise, puisque les coefficients se multiplient : $0,85 \times 1,20 = 1,02 = 1,20 \times 0,85$. En revanche, ajouter les frais de port **avant** la TVA aurait changé le total, car ils n'y sont pas soumis : c'est la seule étape dont la place n'est pas interchangeable.

Contrôle d'ordre de grandeur. 112,50 € de marchandises, 15 % de remise et 20 % de TVA se compensent presque (1,02) : on doit retomber un peu au-dessus de 112,50 € avant le port, ce qui est bien le cas (114,75 €).

Réponse. a) 112,50 € — b) 95,625 € HT, soit 114,75 € TTC — c) 121,65 € — d) 40,55 € par mois — e) environ 5,7 %.