

Plaquette 3 - Fonction dérivée et formules de calcul

Dérivation — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules de dérivation.

— **Définition.** La fonction dérivée f' associe à chaque réel x le nombre dérivé $f'(x)$.

— **Fonctions usuelles.**

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \quad f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \quad f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \quad f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(les deux dernières sur $]0; +\infty[$, la fonction racine n'étant pas dérivable en 0).

— **Les deux règles d'opération.**

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = ku'$$

Autrement dit : on dérive **terme par terme**, et un coefficient constant se conserve.

— **Méthode pour un polynôme.** On dérive chaque monôme séparément : ax^n devient anx^{n-1} . Le terme constant disparaît, le terme en x laisse son coefficient.

— **Avant de dériver, on développe.** Un produit ou un carré s'écrit d'abord sous forme développée : les règles du produit et du quotient ne sont pas au programme de Première générale.

— **Les trois erreurs classiques.** Garder le terme constant ; écrire $(x^3)' = x^2$ en oubliant le facteur 3 ; écrire $(5x)' = 5x$ au lieu de 5.

— **Utilisation.** Une fois f connue, un nombre dérivé se calcule par simple substitution : $f'(a)$ s'obtient en remplaçant x par a dans $f'(x)$.

Correction de l'exercice 1 - Dériver des monômes

On combine la formule de x^n et la règle du coefficient constant :

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{et} \quad (ku)' = ku'$$

a) L'exposant 3 passe en facteur et diminue de 1 :

$$f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$$

b) De même, avec le coefficient négatif conservé : $g'(x) = -2 \times 2x = -4x$.

c) Le terme $7x$ est du premier degré : sa dérivée est son **coefficient**, donc $h'(x) = 7$. Il ne reste aucun x .

d) La fonction k est **constante** : sa courbe est une droite horizontale, de pente nulle partout. Donc

$$k'(x) = 0$$

Les deux erreurs à ne pas faire. Écrire $f'(x) = 5x^2$ (en oubliant de multiplier par l'exposant 3), et écrire $h'(x) = 7x$ (en gardant le x). Un contrôle simple : la dérivée d'un monôme de degré n est de degré $n - 1$.

Réponse. a) $15x^2$ — b) $-4x$ — c) 7 — d) 0 .

Correction de l'exercice 2 - Dériver un polynôme du troisième degré

a) On dérive **terme par terme**, d'après la règle de la somme :

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$- (x^3)' = 3x^2 ;$$

$$- (-4x^2)' = -4 \times 2x = -8x ;$$

$$- (5x)' = 5 ;$$

$$- (-2)' = 0 : \text{le terme constant disparaît.}$$

D'où

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

b) On substitue dans l'expression de f :

$$- f(0) = 0 - 0 + 5 = 5 ;$$

$$- f(1) = 3 - 8 + 5 = 0.$$

c) Comme $f(1) = 0$, la tangente au point d'abscisse 1 est **horizontale**. Son équation est $y = f(1)$, avec $f(1) = 1 - 4 + 5 - 2 = 0$: c'est donc l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$.

Le contrôle de degré. f est de degré 3, donc f' est de degré 2 : on doit obtenir un trinôme, et c'est le cas. Si la dérivée obtenue est encore de degré 3, une erreur s'est glissée dans le calcul.

Réponse. a) $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ — b) $f(0) = 5$ et $f(1) = 0$ — c) elle est horizontale, d'équation $y = 0$.

Correction de l'exercice 3 - Des coefficients décimaux

Les formules sont les mêmes, quelle que soit la nature des coefficients :

$$(ax^n)' = anx^{n-1}$$

a) Terme par terme : $(0,5x^2)' = 0,5 \times 2x = x$, $(-3x)' = -3$ et $(1)' = 0$. Donc

$$f(x) = x - 3$$

b) $(-0,2x^3)' = -0,2 \times 3x^2 = -0,6x^2$ et $(1,5x^2)' = 1,5 \times 2x = 3x$. Donc

$$g'(x) = -0,6x^2 + 3x$$

c) On réécrit d'abord le premier terme comme un coefficient fois x^2 :

$$\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}x^2 = 0,25x^2$$

Sa dérivée est $0,25 \times 2x = 0,5x$, et le 6 disparaît. Donc $h'(x) = 0,5x$, que l'on peut aussi écrire $\frac{x}{2}$.

Le réflexe de la question c). Une fraction dont le **dénominateur est un nombre** se réécrit comme un coefficient : $\frac{x^2}{4}$ est $\frac{1}{4}x^2$, et il n'y a pas besoin de règle de quotient. Celle-ci ne sert que lorsque le dénominateur contient x .

Réponse. a) $f(x) = x - 3$ — b) $g'(x) = -0,6x^2 + 3x$ — c) $h'(x) = 0,5x$.

Correction de l'exercice 4 - Développer avant de dériver

a) On développe le produit :

$$f(x) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$$

b) On dérive la forme développée, terme par terme :

$$f'(x) = 2x - 2$$

c) On substitue $x = 1$:

$$f'(1) = 2 \times 1 - 2 = 0$$

Le nombre dérivé est nul : la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est **horizontale**.

Le point d'abscisse 1 est le sommet de la parabole, où f atteint son minimum

$f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$. On le retrouve par la symétrie : 1 est la moyenne des racines -1 et 3 .

Pourquoi développer d'abord. La règle de dérivation d'un **produit** n'est pas au programme de Première générale. Dériver « chaque facteur séparément » serait faux : $(x+1)'(x-3)' = 1 \times 1 = 1$, ce qui n'a rien à voir avec $2x - 2$. Devant un produit, on développe.

Réponse. a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ — b) $f'(x) = 2x - 2$ — c) $f'(1) = 0$: tangente horizontale au sommet de la parabole.

Correction de l'exercice 5 - Dériver l'inverse et la racine carrée

a) On reconnaît 3 fois la fonction inverse, et la règle du coefficient s'applique :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{donc} \quad f'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$$

b) La formule du cours donne

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En $x = 4$: $\sqrt{4} = 2$, donc

$$g'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

c) Sur $]0; +\infty[$, le carré x^2 est strictement positif, donc $f'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0$: la dérivée de f est **négative**, et f est décroissante.

Pour g , le dénominateur $2\sqrt{x}$ est strictement positif, donc $g'(x) > 0$: la dérivée est **positive** et g est croissante.

Le lien annoncé. Le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction. C'est exactement le théorème de la plaquette suivante, et on vient de le vérifier sur deux fonctions dont on connaît déjà les variations depuis la Seconde.

Réponse. a) $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$ — b) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(4) = 0,25$ — c) $f' < 0$ (f décroissante), $g' > 0$ (g croissante).

Correction de l'exercice 6 - Calculer un nombre dérivé par substitution

a) On dérive terme par terme :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 3x^2 - 6x$$

b) On remplace x par chaque valeur :

$$— f'(0) = 0 - 0 = 0 ;$$

$$— f'(2) = 3 \times 4 - 12 = 12 - 12 = 0 ;$$

$$— f'(3) = 3 \times 9 - 18 = 27 - 18 = 9.$$

c) La tangente est horizontale là où $f'(x) = 0$. On résout, en factorisant :

$$3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$$

Les solutions sont $x = 0$ et $x = 2$ — ce que les calculs de b) laissaient prévoir. Les ordonnées correspondantes sont $f(0) = 2$ et $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

Il y a donc deux points à tangente horizontale : $(0; 2)$ et $(2; -2)$.

L'erreur à éviter en c). Diviser par x pour obtenir $3x - 6 = 0$: cela perdrait la solution $x = 0$. Devant une équation dont tous les termes contiennent x , on **factorise**, on ne divise jamais.

Réponse. a) $f(x) = 3x^2 - 6x - b) 0 ; 0 ; 9 - c)$ aux points $(0; 2)$ et $(2; -2)$.

Correction de l'exercice 7 - Résoudre une équation portant sur la dérivée

a) Terme par terme :

$$f(x) = 3x^2 - 12$$

b) On résout, en reconnaissant une différence de carrés après factorisation par 3 :

$$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$$

Les solutions sont $x = -2$ et $x = 2$. Les ordonnées des points correspondants sont $f(-2) = -8 + 24 = 16$ et $f(2) = 8 - 24 = -16$.

c) On résout de même :

$$3x^2 - 12 = 15 \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9$$

D'où $x = -3$ ou $x = 3$: il y a **deux** points où la tangente a pour coefficient directeur 15.

Ce que la question c) illustre. Contrairement à une parabole, une fonction du troisième degré peut avoir **deux tangentes parallèles**, parce que l'équation $f(x) = m$ est du second degré. Ici les deux tangentes, en -3 et en 3 , ont la même pente 15.

Réponse. a) $f(x) = 3x^2 - 12 - b) x = -2$ ou $x = 2 - c) x = -3$ ou $x = 3$.

Correction de l'exercice 8 - Repérer et corriger une erreur de dérivation

a) **Incorrect.** Le terme $3x$ est du premier degré : sa dérivée est 3, pas $3x$. La dérivée exacte est

$$(x^2 + 3x)' = 2x + 3$$

L'élève a dérivé le premier terme et recopié le second.

b) **Incorrect.** Le terme constant -7 a une dérivée **nulle** : une fonction constante ne varie pas. La dérivée exacte est

$$(x^3 - 7)' = 3x^2$$

c) **Correct.** $(4x^2)' = 4 \times 2x = 8x$ ✓ Le coefficient est conservé et multiplié par l'exposant.

d) **Correct.** On réécrit $\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}x^3$, dont la dérivée est $\frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$ ✓ Le dénominateur numérique se traite comme un coefficient.

Les deux contrôles qui détectent ces erreurs. Le **degré** doit baisser de 1 (en b), $3x^2 - 7$ contient encore un terme de degré 0 non dérivé) et **aucun terme constant** ne doit subsister d'une constante de départ. Un troisième contrôle : la dérivée d'un terme en x ne contient jamais de x .

Réponse. a) faux, $2x + 3 - b)$ faux, $3x^2 - c)$ correct — d) correct.

Correction de l'exercice 9 - Dériver des puissances plus grandes

On applique la formule générale des puissances :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

a) Avec $n = 4$: $f(x) = 4x^3$.

b) Avec $n = 5$: $g(x) = 5x^4$.

c) Terme par terme : $(2x^4)' = 2 \times 4x^3 = 8x^3$, $(-3x^2)' = -6x$ et $(7)' = 0$. Donc

$$h'(x) = 8x^3 - 6x$$

d) On réécrit le premier terme, puis on dérive :

$$k(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 \quad \text{donc} \quad k'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 - 3x^2 = 2x^3 - 3x^2$$

Le mécanisme, en une phrase. L'exposant descend en facteur, puis diminue de 1. Avec x^4 : le 4 descend, l'exposant devient 3, d'où $4x^3$.

Un contrôle utile. La dérivée de x^n est de degré $n - 1$: si le degré n'a pas baissé, c'est que l'exposant n'a pas été diminué.

Réponse. a) $4x^3$ — b) $5x^4$ — c) $8x^3 - 6x$ — d) $2x^3 - 3x^2$.

Correction de l'exercice 10 - Le coût marginal d'un atelier

a) On dérive terme par terme :

$$C'(q) = 0,1 \times 3q^2 - 1,5 \times 2q + 10 = 0,3q^2 - 3q + 10$$

b) On substitue $q = 5$:

$$C'(5) = 0,3 \times 25 - 15 + 10 = 7,5 - 5 = 2,5 \text{ €}$$

C'est le **coût marginal** pour $q = 5$: produire la tonne suivante coûte environ 2,50 €.

c) Le coût réel de la sixième tonne :

$$— C(5) = 0,1 \times 125 - 1,5 \times 25 + 50 + 50 = 12,5 - 37,5 + 100 = 75 \text{ €} ;$$

$$— C(6) = 0,1 \times 216 - 1,5 \times 36 + 60 + 50 = 21,6 - 54 + 110 = 77,6 \text{ €} ;$$

$$— \text{différence} : 77,6 - 75 = 2,6 \text{ €}.$$

Le nombre dérivé $C'(5) = 2,50 \text{ €}$ approche donc le coût réel 2,60 € à 10 centimes près.

L'usage en gestion. Le coût marginal se compare au prix de vente : tant qu'il est inférieur, produire une unité de plus est rentable. Ici, avec 2,50 € de coût marginal, il reste très avantageux de produire davantage.

Réponse. a) $C'(q) = 0,3q^2 - 3q + 10$ — b) $C'(5) = 2,50 \text{ €}$: coût de la tonne suivante — c) coût réel 2,60 €, très proche.

Correction de l'exercice 11 - Une tangente calculée avec la dérivée

a) Terme par terme : $f(x) = 3x^2 - 2$.

b) On calcule les deux nombres nécessaires :

$$f(1) = 1 - 2 = -1 \quad f'(1) = 3 - 2 = 1$$

Puis on applique la formule de la tangente :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1 \times (x - 1) + (-1) = x - 2$$

c) En $a = -1$: $f(-1) = -1 + 2 = 1$ et $f'(-1) = 3 \times 1 - 2 = 1$, donc

$$y = 1 \times (x + 1) + 1 = x + 2$$

Les deux tangentes ont le **même coefficient directeur** 1 : elles sont **parallèles**. Leurs ordonnées à l'origine diffèrent (-2 et $+2$), elles sont donc distinctes.

Pourquoi ce parallélisme. La dérivée $f'(x) = 3x^2 - 2$ ne dépend que de x^2 : deux abscisses opposées donnent donc le même nombre dérivé. C'est le cas chaque fois que la dérivée est une fonction paire.

Réponse. a) $f'(x) = 3x^2 - 2$ — b) $y = x - 2$ — c) $y = x + 2$: les deux tangentes sont parallèles.

Correction de l'exercice 12 - Un tableau de dérivées à compléter

On applique à chaque colonne la formule correspondante.

- $(x^2 - 5x)' = 2x - 5$: le terme du premier degré laisse son coefficient.
- $(-3x^3)' = -3 \times 3x^2 = -9x^2$.
- $\frac{2}{x} = 2 \times \frac{1}{x}$, et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, donc la dérivée est $-\frac{2}{x^2}$.
- $(6x + 1)' = 6$: la fonction est affine, sa dérivée est son coefficient directeur.
- $2\sqrt{x}$: avec $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, la dérivée est

$$2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$f(x)$	$x^2 - 5x$	$-3x^3$	$\frac{2}{x}$	$6x + 1$	$2\sqrt{x}$
$f'(x)$	$2x - 5$	$-9x^2$	$-\frac{2}{x^2}$	6	$\frac{1}{\sqrt{x}}$

Les domaines à ne pas oublier. Les deux dernières colonnes ne concernent que $x > 0$: la fonction inverse n'est pas définie en 0, et la fonction racine carrée n'y est pas dérivable. Les trois premières dérivées sont valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Réponse. $2x - 5$; $-9x^2$; $-\frac{2}{x^2}$; 6 ; $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver les coefficients d'une fonction

a) On dérive terme par terme, en traitant a et b comme des constantes :

$$f'(x) = 2ax + b$$

b) On traduit chaque condition :

- $f(1) = 4$ donne $a + b + 1 = 4$, soit $a + b = 3$;
- $f(1) = 5$ donne $2a + b = 5$.

D'où le système

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

c) On soustrait la première équation de la seconde, ce qui élimine b :

$$(2a + b) - (a + b) = 5 - 3 \Leftrightarrow a = 2$$

Puis $b = 3 - a = 1$. L'expression cherchée est donc

$$f(x) = 2x^2 + x + 1$$

Contrôle : $f(1) = 2 + 1 + 1 = 4$ ✓ et $f'(x) = 4x + 1$, donc $f'(1) = 5$ ✓

La démarche à retenir. Une condition sur f et une condition sur f' donnent deux équations : autant que d'inconnues. C'est la méthode standard pour déterminer une fonction dont on connaît un point et une pente.

Réponse. a) $f(x) = 2ax + b$ — b) $a + b = 3$ et $2a + b = 5$ — c) $a = 2, b = 1$, donc $f(x) = 2x^2 + x + 1$.

Correction de l'exercice 14 - Signe de la dérivée sur un graphique

a) On suit la courbe de gauche à droite :

- elle **descend** de $x = 0$ jusqu'à un point bas situé en $x = 1$;
- elle **monte** de $x = 1$ jusqu'à un sommet local en $x = 3$;
- elle **redescend** de $x = 3$ jusqu'à $x = 4$.

Donc f est décroissante sur $[0 ; 1]$ et sur $[3 ; 4]$, croissante sur $[1 ; 3]$.

b) Le signe de la dérivée suit le sens de variation :

$$f \text{ croissante} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad f \text{ décroissante} \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$$

Donc $f'(x) \leq 0$ sur $[0 ; 1]$ et sur $[3 ; 4]$, et $f'(x) \geq 0$ sur $[1 ; 3]$.

c) La dérivée s'annule là où la tangente est horizontale, c'est-à-dire aux deux extremums locaux :

$$f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(3) = 0$$

Le contrôle par le calcul. La fonction représentée est $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 6$, de dérivée $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x - 1)(x - 3)$: elle s'annule bien en 1 et en 3, et elle est positive entre les deux ✓ La lecture graphique et le calcul concordent.

Réponse. a) décroissante sur $[0 ; 1]$ et $[3 ; 4]$, croissante sur $[1 ; 3]$ — b) $f' \leq 0$ puis ≥ 0 puis ≤ 0 — c) en $x = 1$ et $x = 3$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : dériver puis exploiter

a) On dérive terme par terme :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

On factorise d'abord par 3, puis on cherche les racines du trinôme obtenu (somme 4, produit 3) :

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$$

Contrôle du développement : $3(x^2 - 3x - x + 3) = 3x^2 - 12x + 9$ ✓

b) Le produit est nul si l'un des facteurs l'est :

$$3(x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

Les ordonnées correspondantes :

- $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$;
- $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$.

Les points à tangente horizontale sont donc $(1 ; 4)$ et $(3 ; 0)$.

c) Une tangente horizontale a pour équation $y = f(a)$:

$$y = 4 \quad \text{et} \quad y = 0$$

La seconde est l'axe des abscisses : la courbe le touche en $x = 3$ sans le traverser à cet endroit.

d) En $a = 0$: $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3 \times (-1) \times (-3) = 9$, donc

$$y = 9(x - 0) + 0 = 9x$$

Le bilan de la plaquette. Une fois f' calculée, tout devient mécanique : un nombre dérivé est une substitution, une tangente horizontale une équation $f'(x) = 0$, une tangente quelconque une application de la formule. Et la factorisation de f' , comme en a), est la clé de la plaquette suivante : c'est elle qui donnera le **signe** de f' , donc les variations de f .

Réponse. a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$ — b) points (1 ; 4) et (3 ; 0) — c) $y = 4$ et $y = 0$ — d) $y = 9x$.