

Plaquette 1 - Taux de variation et nombre dérivé

Dérivation — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taux de variation, nombre dérivé et interprétations.

- **Taux de variation** de f entre a et b (avec $a \neq b$) :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

C'est la **pente de la sécante**, la droite qui passe par les points de la courbe d'abscisses a et b .

- **Taux d'accroissement** en a , écrit avec un pas $h \neq 0$:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- **Nombre dérivé**. Si ce quotient tend vers un nombre réel quand h tend vers 0, ce nombre est le nombre dérivé de f en a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- **La méthode de calcul, en quatre étapes** : écrire $f(a + h)$ et développer ; soustraire $f(a)$; **simplifier par h** ; remplacer h par 0.
- **Interprétation graphique**. $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .
- **Interprétations concrètes**. Si $d(t)$ est une distance, le taux de variation est une **vitesse moyenne** et $d'(t)$ la **vitesse instantanée**. Si $C(q)$ est un coût, $C'(q)$ est le **coût marginal** : le coût approximatif de l'unité suivante.
- **Signe du nombre dérivé**. $f'(a) > 0$: la courbe monte au point d'abscisse a ; $f'(a) < 0$: elle descend ; $f'(a) = 0$: la tangente est horizontale.
- **Approximation affine**. Pour h petit :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$

Correction de l'exercice 1 - Un premier taux de variation

a) Les deux images se calculent directement : $f(1) = 1^2 = 1$ et $f(3) = 3^2 = 9$.

b) On applique la formule du cours :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Le taux de variation de f entre 1 et 3 vaut donc 4.

c) Ce nombre est le **coefficient directeur de la droite** qui joint les points $A(1 ; 1)$ et $B(3 ; 9)$ de la courbe, appelée sécante. Autrement dit, entre $x = 1$ et $x = 3$, la fonction augmente en moyenne de 4 unités par unité de x .

L'erreur de dénominateur. Diviser par 3 (la plus grande des deux abscisses) au lieu de $3 - 1 = 2$: le dénominateur est bien l'**écart** entre les abscisses, jamais une abscisse seule.

À noter. Le taux de variation dépend des **deux** bornes : entre 1 et 2, il vaut $\frac{4-1}{1} = 3$, et

non 4. C'est une moyenne sur un intervalle, pas une caractéristique du point 1.

Réponse. a) $f(1) = 1$ et $f(3) = 9$ — b) taux = 4 — c) c'est le coefficient directeur de la sécante joignant (1 ; 1) et (3 ; 9).

Correction de l'exercice 2 - Resserrer l'intervalle

a) On applique à chaque fois la même formule :

$$\frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \frac{b^2 - 1}{b - 1}$$

$$- b = 2 : \frac{4 - 1}{1} = 3 ;$$

$$- b = 1,5 : \frac{2,25 - 1}{0,5} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5 ;$$

$$- b = 1,1 : \frac{1,21 - 1}{0,1} = \frac{0,21}{0,1} = 2,1 ;$$

$$- b = 1,01 : \frac{1,0201 - 1}{0,01} = \frac{0,0201}{0,01} = 2,01.$$

b	2	1,5	1,1	1,01
taux	3	2,5	2,1	2,01

b) Les taux s'approchent de 2 : 3, puis 2,5, puis 2,1, puis 2,01. On peut même remarquer que le taux vaut exactement $b + 1$, puisque $\frac{b^2 - 1}{b - 1} = \frac{(b - 1)(b + 1)}{b - 1} = b + 1$.

c) Cette valeur limite est le **nombre dérivé** de f en 1, noté $f'(1)$: ici $f'(1) = 2$.

Ce que le calcul montre. Le taux de variation mesure une pente **moyenne** ; en rapprochant les deux points, on obtient la pente **en un point**. C'est toute l'idée de la dérivation, et la factorisation $b^2 - 1 = (b - 1)(b + 1)$ montre pourquoi la limite existe : le $b - 1$ du dénominateur se simplifie.

Réponse. a) 3 ; 2,5 ; 2,1 ; 2,01 — b) les taux tendent vers 2 — c) c'est le nombre dérivé $f'(1) = 2$.

Correction de l'exercice 3 - Le calcul avec le pas h

a) On remplace x par $1 + h$ et on développe avec l'identité remarquable :

$$f(1 + h) = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

b) On forme le taux d'accroissement du cours, avec $f(1) = 1$:

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h}$$

On factorise le numérateur par h , puis on simplifie — c'est possible car $h \neq 0$:

$$\frac{h(2 + h)}{h} = 2 + h$$

c) Quand h tend vers 0, l'expression $2 + h$ tend vers 2, donc

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$

Ce résultat confirme la conjecture obtenue par le tableau de valeurs de l'exercice précédent.

L'étape qui compte. La simplification par h est toujours possible, parce que le numérateur s'annule quand $h = 0$: il contient donc h en facteur. Si la simplification ne se fait pas, c'est qu'il y a une erreur de développement en amont.

Pourquoi on ne remplace pas h par 0 tout de suite. Avant simplification, le quotient serait $\frac{0}{0}$, ce qui n'a aucun sens. C'est **après** avoir simplifié que l'on peut remplacer.

Réponse. a) $f(1 + h) = 1 + 2h + h^2$ — b) le taux vaut $\frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$ — c) $f'(1) = 2$.

Correction de l'exercice 4 - Un nombre dérivé sur un trinôme

a) Pour $x = 2$: $g(2) = 4 + 6 = 10$. Puis, en remplaçant x par $2 + h$:

$$g(2 + h) = (2 + h)^2 + 3(2 + h) = 4 + 4h + h^2 + 6 + 3h = 10 + 7h + h^2$$

b) On forme le taux d'accroissement :

$$\frac{g(2 + h) - g(2)}{h} = \frac{10 + 7h + h^2 - 10}{h} = \frac{7h + h^2}{h} = \frac{h(7 + h)}{h} = 7 + h$$

Le terme constant 10 disparaît : c'est normal, la soustraction de $g(2)$ élimine toujours la partie qui ne dépend pas de h .

c) Quand h tend vers 0 :

$$g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (7 + h) = 7$$

Le contrôle par une valeur numérique. Avec $h = 0,001$, le taux vaut 7,001 : très proche de 7 ✓ Un contrôle de ce type détecte immédiatement une erreur de développement.

Ce que signifie $g'(2) = 7$. Au point d'abscisse 2, la courbe de g monte avec une pente de 7 : une petite augmentation de x de 0,01 fait croître g d'environ 0,07.

Réponse. a) $g(2) = 10$ et $g(2 + h) = 10 + 7h + h^2$ — b) le taux vaut $7 + h$ — c) $g'(2) = 7$.

Correction de l'exercice 5 - Le cas d'une fonction affine

a) On calcule les deux images :

$$f(a + h) = 3(a + h) - 5 = 3a + 3h - 5 \quad f(a) = 3a - 5$$

Puis le taux d'accroissement :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{3a + 3h - 5 - 3a + 5}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

Le taux vaut 3, **quels que soient** a et h : il ne dépend d'aucun des deux.

b) Le taux étant constant, sa limite quand h tend vers 0 est ce même nombre :

$$f'(a) = 3 \quad \text{pour tout réel } a$$

c) La courbe de f est une **droite** de coefficient directeur 3. Sa pente est la même partout, donc la tangente en n'importe quel point est la droite elle-même. Le nombre dérivé d'une fonction affine est donc constant, égal à son coefficient directeur.

La règle générale à retenir. Pour $f(x) = mx + p$, on a $f'(x) = m$ pour tout x — et en particulier, pour une fonction **constante**, $f'(x) = 0$. C'est la première formule de dérivation du cours, et on vient de la démontrer.

Réponse. a) le taux vaut 3 — b) $f'(a) = 3$ pour tout a — c) la courbe est une droite de pente 3, identique en tout point.

Correction de l'exercice 6 - Le nombre dérivé de la fonction cube

a) Avec $f(1) = 1$ et le développement fourni :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h}$$

On factorise par h et on simplifie :

$$\frac{h(3 + 3h + h^2)}{h} = 3 + 3h + h^2$$

b) Quand h tend vers 0, les deux termes contenant h s'annulent :

$$f(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3$$

c) Même démarche en 2, avec $f(2) = 8$:

$$\frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} = 12 + 6h + h^2$$

D'où $f(2) = 12$.

Ce que l'on commence à voir. $f(1) = 3 = 3 \times 1^2$ et $f(2) = 12 = 3 \times 2^2$: la formule générale sera $f(x) = 3x^2$, ce que la plaquette 3 établira. Les nombres dérivés d'une même fonction se rassemblent en une **nouvelle fonction**, la fonction dérivée.

Le réflexe de simplification. Tous les termes du numérateur contiennent h : on le met en facteur avant de simplifier, jamais après.

Réponse. a) le taux vaut $3 + 3h + h^2$ — b) $f(1) = 3$ — c) le taux vaut $12 + 6h + h^2$ et $f(2) = 12$.

Correction de l'exercice 7 - Le nombre dérivé de la fonction inverse

a) On écrit la différence des deux images en les mettant au même dénominateur :

$$f(2+h) - f(2) = \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (2+h)}{2(2+h)} = \frac{-h}{2(2+h)}$$

Le taux d'accroissement est cette différence divisée par h , ce qui revient à multiplier par $\frac{1}{h}$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-h}{2(2+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{2(2+h)}$$

Le h s'est simplifié, comme toujours.

b) Quand h tend vers 0, le dénominateur tend vers $2 \times 2 = 4$:

$$f(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)} = \frac{-1}{4} = -0,25$$

c) Le nombre dérivé est **négatif**. Cela signifie que la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 a une pente négative : la courbe **descend** en ce point. C'est cohérent, la fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$.

La technique à retenir. Avec une fraction, on met au même dénominateur **avant** de diviser par h . Diviser une fraction par h revient à la multiplier par $\frac{1}{h}$, jamais à ajouter h au dénominateur.

Réponse. a) le taux vaut $\frac{-1}{2(2+h)}$ — b) $f(2) = -0,25$ — c) négatif : la courbe descend au point d'abscisse 2.

Correction de l'exercice 8 - Vitesse moyenne et vitesse instantanée

a) La vitesse moyenne est le taux de variation de la distance sur l'intervalle de temps :

$$v_{\text{moy}} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2} = \frac{80 - 20}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

(avec $d(2) = 5 \times 4 = 20 \text{ m}$ et $d(4) = 5 \times 16 = 80 \text{ m}$).

b) On forme le taux d'accroissement en 2 :

$$\frac{d(2+h) - d(2)}{h} = \frac{5(2+h)^2 - 20}{h} = \frac{20 + 20h + 5h^2 - 20}{h} = \frac{h(20 + 5h)}{h} = 20 + 5h$$

Donc $d'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (20 + 5h) = 20$.

c) $d'(2) = 20 \text{ m/s}$ est la **vitesse instantanée** à l'instant $t = 2 \text{ s}$: celle que lirait un radar à cet instant précis. Les deux résultats diffèrent parce qu'ils ne mesurent pas la même chose : 30 m/s est la vitesse **moyenne** sur les deux secondes qui suivent, pendant lesquelles l'objet accélère continûment. La vitesse instantanée à $t = 2 \text{ s}$ est donc plus faible que la moyenne sur $[2 ; 4]$.

Le contrôle de cohérence. La vitesse instantanée en $t = 4$ vaut $d'(4) = 40 \text{ m/s}$ (même calcul). La moyenne des deux vitesses instantanées, $\frac{20 + 40}{2} = 30 \text{ m/s}$, est bien la vitesse moyenne trouvée en a) — une coïncidence propre à la chute libre, où la vitesse croît de façon affine.

Réponse. a) 30 m/s — b) le taux vaut $20 + 5h$, donc $d'(2) = 20 \text{ m/s}$ — c) 20 m/s est la vitesse instantanée ; la moyenne est plus grande car l'objet accélère.

Correction de l'exercice 9 - Lire un nombre dérivé sur un graphique

a) Le point A a pour abscisse 1 ; on lit son ordonnée sur le graphique : $f(1) = 1$.

b) Le coefficient directeur d'une droite se lit en se déplaçant d'une unité vers la droite et en mesurant le déplacement vertical. Sur la tangente T, en partant de A(1 ; 1) et en avançant de 1 en abscisse, on descend de 1 :

$$\text{coefficient directeur} = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}} = \frac{-1}{1} = -1$$

Le cours identifie ce coefficient au nombre dérivé :

$$f'(1) = -1$$

c) Le nombre dérivé est **négatif**, donc la courbe **descend** au point A : la fonction y est décroissante. Le graphique le confirme, le minimum de la courbe se situant à droite de A.

La méthode de lecture. On choisit deux points de la tangente à coordonnées **entières** (ici (1 ; 1) et (2 ; 0)) et on calcule $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Lire la pente « à l'œil » sans utiliser deux points précis est la source d'erreur la plus fréquente.

Réponse. a) $f(1) = 1$ — b) coefficient directeur -1 , donc $f'(1) = -1$ — c) la courbe descend en A.

Correction de l'exercice 10 - Le signe du nombre dérivé selon le point

a) Le signe du nombre dérivé est celui de la pente de la tangente :

- en $x = -1$, la tangente **descend** de gauche à droite : sa pente est négative, donc $f'(-1) < 0$;
- en $x = 1$, la tangente est **horizontale** : sa pente est nulle, donc $f'(1) = 0$;
- en $x = 3$, la tangente **monte** : sa pente est positive, donc $f'(3) > 0$.

b) C'est $f'(1)$ qui est nul :

$$f'(1) = 0$$

Le point d'abscisse 1 est le **sommet** de la parabole, c'est-à-dire le point où la fonction cesse de décroître pour croître. La tangente y est horizontale : c'est la signature graphique d'un extremum.

c) Un nombre négatif est inférieur à 0, lui-même inférieur à un nombre positif :

$$f(-1) < f(1) < f(3)$$

En lisant les pentes sur le graphique, on obtient même les valeurs exactes : $f(-1) = -4$, $f(1) = 0$ et $f(3) = 4$.

La lecture utile. Le signe du nombre dérivé donne le sens de variation **au point considéré**. C'est le lien qui sera exploité systématiquement dans la plaquette 4 : le signe de f' sur un intervalle donne les variations de f sur cet intervalle.

Réponse. a) $f(-1) < 0$, $f(1) = 0$, $f(3) > 0$ — b) $f(1) = 0$ (sommet de la parabole) — c) $f(-1) < f(1) < f(3)$.

Correction de l'exercice 11 - Coût moyen et coût marginal

a) On calcule les deux coûts :

$$- C(10) = 100 + 100 + 50 = 250 \text{ €} ;$$

$$- C(12) = 144 + 120 + 50 = 314 \text{ €}.$$

Le taux de variation vaut donc

$$\frac{C(12) - C(10)}{12 - 10} = \frac{314 - 250}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ €}$$

C'est le coût **moyen** de chacun des deux objets supplémentaires : passer de 10 à 12 objets coûte 32 € par objet ajouté.

b) On forme le taux d'accroissement en 10 :

$$\frac{C(10 + h) - C(10)}{h} = \frac{(10 + h)^2 + 10(10 + h) + 50 - 250}{h}$$

On développe le numérateur : $100 + 20h + h^2 + 100 + 10h + 50 - 250 = 30h + h^2$. D'où

$$\frac{h(30 + h)}{h} = 30 + h \quad \text{et} \quad C'(10) = 30$$

c) Le coût réel du onzième objet est

$$C(11) - C(10) = (121 + 110 + 50) - 250 = 281 - 250 = 31 \text{ €}$$

Le nombre dérivé $C'(10) = 30 \text{ €}$ en est une très bonne approximation, à 1 € près. C'est précisément la définition économique du **coût marginal** : le coût approximatif de l'unité suivante.

Pourquoi l'approximation. Le nombre dérivé est la limite du taux pour h **tendant vers** 0, alors que produire un objet de plus correspond à $h = 1$. L'écart vient de là, et il est d'autant plus petit que les quantités sont grandes.

Réponse. a) taux = 32 € par objet entre 10 et 12 — b) $C'(10) = 30$ — c) le coût réel du onzième objet est 31 €, très proche de 30 €.

Correction de l'exercice 12 - Taux de variation sur un relevé

a) On applique la formule du taux de variation, ici exprimé en degrés par minute :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- entre 0 et 2 : $\frac{80 - 20}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ °C/min}$;
- entre 6 et 8 : $\frac{200 - 170}{8 - 6} = \frac{30}{2} = 15 \text{ °C/min}$.

b) On complète les deux taux manquants : entre 2 et 4, $\frac{130 - 80}{2} = 25 \text{ °C/min}$; entre 4 et 6, $\frac{170 - 130}{2} = 20 \text{ °C/min}$. Les quatre taux sont donc 30, 25, 20 et 15 : le four chauffe le plus vite sur le **premier intervalle**, entre 0 et 2 minutes, et de moins en moins vite ensuite.

c) Non. Le tableau ne donne la température que toutes les deux minutes : la valeur à $t = 3 \text{ min}$ est inconnue. On peut en revanche l'**estimer**, en supposant la montée régulière entre 2 et 4 minutes : environ $80 + 25 = 105 \text{ °C}$. Mais ce n'est qu'une approximation, pas une donnée.

L'interprétation physique. Les taux qui diminuent traduisent un four qui approche de sa température de consigne : plus il est chaud, plus il perd de chaleur vers l'extérieur, donc plus la montée ralentit. Le taux de variation est ici la « vitesse de chauffe ».

Réponse. a) 30 °C/min puis 15 °C/min — b) entre 0 et 2 minutes — c) non, la température à 3 min n'est pas relevée.

Correction de l'exercice 13 - Un nombre dérivé nul

a) Pour $x = 2$: $f(2) = 4 - 8 = -4$. Puis :

$$f(2 + h) = (2 + h)^2 - 4(2 + h) = 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h = h^2 - 4$$

Les termes en h du premier degré se sont **annulés entre eux** : c'est le signe que le nombre dérivé sera nul.

b) On forme le taux d'accroissement :

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 - 4 - (-4)}{h} = \frac{h^2}{h} = h$$

c) Quand h tend vers 0, le taux h tend vers 0 :

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est donc **horizontale**. Le point d'abscisse 2 est le sommet de la parabole : on le retrouve d'ailleurs par la formule du second degré, $\alpha = -\frac{-4}{2} = 2$, et $f(2) = -4$ est le minimum de f .

Le lien entre les deux chapitres. Le sommet d'une parabole est exactement le point où le nombre dérivé s'annule. La dérivation généralise donc la recherche d'extremum à toutes les fonctions, et pas seulement aux trinômes.

Réponse. a) $f(2) = -4$ et $f(2 + h) = h^2 - 4$ — b) le taux vaut h — c) $f'(2) = 0$: tangente horizontale au sommet de la parabole.

Correction de l'exercice 14 - Approcher une valeur avec le nombre dérivé

a) On applique la formule d'approximation affine du cours, avec $a = 1$ et $h = 0,02$:

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$

$$f(1,02) \approx f(1) + f'(1) \times 0,02 = 1 + 2 \times 0,02 = 1,04$$

b) La valeur exacte est

$$f(1,02) = 1,02^2 = 1,0404$$

L'approximation 1,04 est donc juste à 0,0004 près : excellente, pour un calcul mental.

c) Avec $h = 0,5$:

$$f(1,5) \approx 1 + 2 \times 0,5 = 2$$

alors que la valeur exacte est $f(1,5) = 2,25$. L'erreur est cette fois de 0,25, soit plus de 10 %. L'approximation affine n'est bonne que pour des **petits** h : elle remplace la courbe par sa tangente, et l'écart entre les deux grandit dès qu'on s'éloigne du point de contact.

L'erreur en général. Pour $f(x) = x^2$, l'écart vaut exactement h^2 : $0,0004 = 0,02^2$ ✓ et $0,25 = 0,5^2$ ✓ Doubler h quadruple l'erreur.

Réponse. a) $f(1,02) \approx 1,04$ — b) valeur exacte 1,0404, écart 0,0004 — c) $f(1,5) \approx 2$ contre 2,25 : l'approximation ne vaut que pour h petit.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : trois nombres dérivés sur la même fonction

a) On calcule les deux images : $f(-1) = 1 + 1 + 2 = 4$ et $f(2) = 4 - 2 + 2 = 4$. Le taux vaut donc

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{4 - 4}{3} = 0$$

Un taux nul signifie que la sécante joignant les deux points est **horizontale** : la fonction repasse par la même valeur en -1 et en 2 . Cela ne veut pas dire qu'elle est constante entre les deux — elle descend puis remonte.

b) Avec $f(1) = 1 - 1 + 2 = 2$:

$$f(1+h) = (1+h)^2 - (1+h) + 2 = 1 + 2h + h^2 - 1 - h + 2 = 2 + h + h^2$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h + h^2}{h} = 1 + h \quad \text{donc} \quad f'(1) = 1$$

c) Avec $f(0) = 2$:

$$f(0+h) = h^2 - h + 2 \quad \text{donc} \quad \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = h - 1$$

D'où $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 1) = -1$.

d) $f'(0) = -1 < 0$ et $f'(1) = 1 > 0$: la fonction **descend** au point d'abscisse 0 et **monte** au point d'abscisse 1. Elle change donc de sens entre 0 et 1, et son minimum se situe dans cet intervalle. Le chapitre du second degré le confirme : $\alpha = -\frac{-1}{2} = 0,5$, et le minimum est $f(0,5) = 1,75$.

Le bilan de la plaquette. Le taux de variation décrit un **intervalle**, le nombre dérivé décrit un **point**. Le premier se calcule avec deux images, le second en formant le quotient avec h , en simplifiant par h , puis en remplaçant h par 0. Les plaquettes suivantes remplaceront ce calcul par des formules — mais c'est lui qui les justifie.

Réponse. a) taux nul : $f(-1) = f(2) = 4$ — b) $f'(1) = 1$ — c) $f'(0) = -1$ — d) f descend en 0 et monte en 1 : son minimum est entre les deux (en 0,5).