

Plaquette 5 - Synthèse : étudier une fonction

Dérivation — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Étudier une fonction : le plan complet.

- **1. Dériver** : formules des fonctions usuelles, somme, produit par un nombre.
- **2. Factoriser** f : facteur commun, identité remarquable, ou racines du trinôme.
- **3. Tableau de signes de f** , puis **tableau de variations de f** — valeurs calculées avec f .
- **4. Extremums** : un changement de signe de f donne un extremum local ; sur un intervalle fermé, comparer aussi les **bornes**.
- **5. Tangentes** utiles, avec la formule

$$y = f(a)(x - a) + f(a)$$

- **Position relative courbe / tangente** : on étudie le signe de la différence $f(x) - [f(a)(x - a) + f(a)]$, après factorisation.
- **Tangente parallèle à une droite de coefficient m** : on résout $f'(x) = m$.
- **Optimiser, en cinq temps** : nommer l'inconnue et son **domaine** ; exprimer la grandeur ; dériver et factoriser ; tableau de variations ; conclure avec les unités.
- **Les grandeurs qui reviennent**. Volume d'un pavé $V = \text{aire de base} \times \text{hauteur}$; aire totale d'une boîte à base carrée sans couvercle $S = x^2 + 4xh$; distance, vitesse $v(t) = d'(t)$; coût marginal $C'(q)$; coût moyen $\frac{C(q)}{q}$.
- **L'erreur qui coûte le plus de points**. Oublier le domaine : un optimum en $x = 8$ ne vaut rien si l'inconnue doit rester inférieure à 6. On écrit le domaine **avant** de dériver.

Correction de l'exercice 1 - Étude complète d'un trinôme

a) La dérivée est $f'(x) = 4x - 8$, qui s'annule pour $x = 2$ et change de signe (négative avant, positive après).

$$f(2) = 8 - 16 + 5 = -3$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	
variations de f		décroissante	-3	croissante	

b) La fonction admet un **minimum** égal à -3 , atteint en $x = 2$. C'est un minimum car f passe du $-$ au $+$.

c) En $a = 0$: $f(0) = 5$ et $f'(0) = -8$, donc

$$y = -8(x - 0) + 5 = -8x + 5$$

d) Être parallèle à $y = 4x - 1$ signifie avoir le coefficient directeur 4 :

$$f'(x) = 4 \Leftrightarrow 4x - 8 = 4 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$$

Le point cherché est celui d'abscisse 3, d'ordonnée $f(3) = 18 - 24 + 5 = -1$. La tangente y a pour équation $y = 4(x - 3) - 1 = 4x - 13$.

Le contrôle par le second degré. $\alpha = -\frac{-8}{4} = 2$ et $\beta = -3$: la forme canonique est $f(x) = 2(x - 2)^2 - 3$, ce qui confirme le minimum. Les deux chapitres donnent le même résultat.

Réponse. a) $f(x) = 4x - 8$, décroissante puis croissante — b) minimum -3 en $x = 2$ — c) $y = -8x + 5$ — d) au point $(3; -1)$, tangente $y = 4x - 13$.

Correction de l'exercice 2 - Étude complète d'une fonction du troisième degré

a) On dérive puis on met $3x$ en facteur :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

b) Les racines de f' sont 0 et 2, avec un coefficient dominant positif : f' est positive à l'extérieur, négative entre les racines. Les valeurs de f :

$$f(0) = 4 \quad f(2) = 8 - 12 + 4 = 0$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
variations de f		croissante	4	décroissante	0	croissante	

c) f passe du + au - en $x = 0$: **maximum local** égal à 4. Elle passe du - au + en $x = 2$: **minimum local** égal à 0.

d) En $a = 1$: $f(1) = 1 - 3 + 4 = 2$ et $f'(1) = 3 - 6 = -3$, donc

$$y = -3(x - 1) + 2 = -3x + 3 + 2 = -3x + 5$$

Contrôle : pour $x = 1$, $y = -3 + 5 = 2 = f(1)$ ✓

Un détail intéressant. Le minimum local vaut 0 : la courbe **touche** l'axe des abscisses en $x = 2$ sans le traverser. On peut le vérifier par la factorisation $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$, où le carré empêche le changement de signe.

Réponse. a) $f'(x) = 3x(x - 2)$ — b) croissante, décroissante, croissante — c) maximum local 4 en 0, minimum local 0 en 2 — d) $y = -3x + 5$.

Correction de l'exercice 3 - Un coefficient dominant négatif

a) On dérive, puis on factorise par -3 :

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x - 1)(x + 1)$$

b) Le coefficient dominant de f' est -3 , négatif : f' est donc **négative à l'extérieur** des racines -1 et 1 , et positive entre elles. Les valeurs :

$$f(-1) = 1 - 3 + 2 = 0 \quad f(1) = -1 + 3 + 2 = 4$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variations de f		décroissante	0	croissante	4	décroissante	

c) En $x = -1$, f passe du - au + : **minimum local** égal à 0. En $x = 1$, elle passe du + au - : **maximum local** égal à 4.

d) La tangente est horizontale là où $f'(x) = 0$, donc en $x = -1$ et $x = 1$. Les équations sont $y = f(a)$:

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = 4$$

L'effet du signe du coefficient dominant. Comparé à l'exercice précédent, l'ordre des extremums est inversé : ici la fonction descend, monte, puis redescend. Le signe de a dans un polynôme de degré 3 décide de l'allure générale, exactement comme pour un trinôme.

Réponse. a) $f(x) = -3(x-1)(x+1)$ — b) décroissante, croissante, décroissante — c) minimum local 0 en -1 , maximum local 4 en 1 — d) $y = 0$ et $y = 4$.

Correction de l'exercice 4 - Tout lire sur une courbe

a) Le point de contact de la tangente a pour abscisse 0 : on lit son ordonnée, $f(0) = 2$. La tangente T est **horizontale**, donc son coefficient directeur est nul :

$$f'(0) = 0$$

b) En suivant la courbe de gauche à droite : elle monte de $x = -1$ jusqu'à $x = 0$, descend de $x = 0$ jusqu'à $x = 2$, puis remonte de $x = 2$ jusqu'à $x = 4$.

Donc f est croissante sur $[-1; 0]$ et sur $[2; 4]$, décroissante sur $[0; 2]$.

c) Le signe de f' suit ces variations :

x	-1		0		2		4
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	

d) On relève les quatre valeurs candidates sur le graphique : $f(-1) = -2$, $f(0) = 2$, $f(2) = -2$ et $f(4) = 18$.

Le **maximum** sur $[-1; 4]$ est donc 18, atteint à la borne $x = 4$; le **minimum** est -2 , atteint deux fois, en $x = -1$ et en $x = 2$.

Le contrôle par le calcul. La fonction représentée est $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$: elle s'annule bien en 0 et 2 ✓ Et $f(4) = 64 - 48 + 2 = 18$ ✓ La lecture graphique est confirmée.

Réponse. a) $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$ — b) croissante sur $[-1; 0]$ et $[2; 4]$, décroissante sur $[0; 2]$ — c) +, -, + — d) maximum 18 en $x = 4$, minimum -2 en $x = -1$ et $x = 2$.

Correction de l'exercice 5 - Retrouver la bonne expression

Le tableau indique deux informations : f' s'annule en -3 et en 1 , et son coefficient dominant est **positif** (signe + aux extrémités).

On dérive chacune des trois expressions.

$$a) f_1'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x-1)(x+3).$$

Les racines sont bien 1 et -3 , et le coefficient dominant 3 est positif : le tableau de signes est +, -, + ✓ **C'est l'expression qui convient.**

b) $f_2'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$: les racines sont -1 et 3, et non -3 et 1. Cette expression ne convient pas — les signes ont été confondus.

c) $f_3'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x-3)(x+1)$: mauvaises racines **et** coefficient dominant négatif, donc le tableau serait -, +, -. Cette expression ne convient pas non plus.

La méthode. Deux critères suffisent à départager : les **racines** de f' (les abscisses des extremums) et le **signe aux extrémités** (donné par le signe du coefficient dominant de f'). Il est inutile de calculer les valeurs de f .

Réponse. C'est f_1 , car $f_1'(x) = 3(x-1)(x+3)$ s'annule en -3 et 1 avec un coefficient dominant positif.

Correction de l'exercice 6 - La concentration d'un médicament

a) On dérive puis on factorise par $-3t$:

$$C'(t) = -3t^2 + 12t = -3t(t - 4)$$

b) Sur $[0; 6]$, le facteur $-3t$ est négatif (sauf en 0), donc le signe de C' est l'opposé de celui de $t - 4$: C' est positive sur $]0; 4[$ et négative sur $]4; 6[$.

Les valeurs : $C(0) = 0$, $C(4) = -64 + 96 = 32$ et $C(6) = -216 + 216 = 0$.

t	0		4		6
signe de $C'(t)$	0	+	0	-	
variations de C	0	croissante	32	décroissante	0

c) La concentration est maximale au bout de 4 **heures**, et vaut alors 32 **mg/L**.

d) $C(6) = 0$ mg/L : d'après le modèle, le principe actif a totalement disparu du sang au bout de 6 heures. C'est cohérent avec le choix du domaine $[0; 6]$: au-delà, le modèle donnerait des concentrations **négatives** ($C(7) = -343 + 294 = -49$), ce qui n'a aucun sens physique.

Ce que le domaine protège. Un modèle polynomial n'est valable que sur l'intervalle annoncé. C'est pourquoi l'énoncé le précise, et pourquoi il faut toujours vérifier que l'optimum trouvé s'y trouve — ici $4 \in [0; 6]$ ✓

Réponse. a) $C'(t) = -3t(t - 4)$ — b) croissante puis décroissante — c) maximum 32 mg/L au bout de 4 h — d) $C(6) = 0$: le produit a disparu, et le modèle cesse d'être valable.

Correction de l'exercice 7 - Position d'une courbe et de sa tangente

a) Avec $f(1) = 1$ et $f(x) = 3x^2$, donc $f(1) = 3$:

$$y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 3 + 1 = 3x - 2$$

b) On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}(x - 1)^2(x + 2) &= (x^2 - 2x + 1)(x + 2) \\ &= x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2\end{aligned}$$

Or $f(x) - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$: l'égalité est bien vérifiée pour tout réel x .

c) Le signe de la différence est celui du produit $(x - 1)^2(x + 2)$. Le carré est **toujours positif ou nul**, donc le signe est celui de $x + 2$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x - 1)^2$		+	+	+	0	+	
$x + 2$		-	0	+	+	+	
différence		-	0	+	0	+	

La courbe est donc **en dessous** de T sur $]-\infty; -2[$, et **au-dessus** sur $]-2; +\infty[$. Elle coupe T en $x = -2$ et la touche (point de contact) en $x = 1$.

La différence entre les deux racines. En $x = 1$, racine **double**, la différence ne change pas de signe : c'est le point de tangence. En $x = -2$, racine simple, elle change de signe : la courbe traverse la tangente. Une tangente peut donc bien recouper la courbe.

Réponse. a) $T: y = 3x - 2$ — b) le développement donne $x^3 - 3x + 2$ — c) courbe en dessous sur $]-\infty; -2[$, au-dessus sur $]-2; +\infty[$.

Correction de l'exercice 8 - Recette, coût et bénéfice cubique

a) La recette est $R(q) = 27q$, donc le bénéfice est

$$B(q) = R(q) - C(q) = 27q - (q^3 - 6q^2 + 15q + 8)$$

$$B(q) = 27q - q^3 + 6q^2 - 15q - 8 = -q^3 + 6q^2 + 12q - 8$$

b) On dérive terme par terme :

$$B'(q) = -3q^2 + 12q + 12$$

D'après l'énoncé, ses racines sont $2 - 2\sqrt{2}$ et $2 + 2\sqrt{2}$, donc

$$B'(q) = -3(q - 2 + 2\sqrt{2})(q - 2 - 2\sqrt{2})$$

(Contrôle par le discriminant : $\Delta = 144 + 144 = 288$, et $\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$, d'où

$$q = \frac{-12 \pm 12\sqrt{2}}{-6} = 2 \mp 2\sqrt{2} \quad \checkmark)$$

c) Numériquement, $2\sqrt{2} \approx 2,83$, donc les racines valent environ $-0,83$ et $4,83$. Sur le domaine $[0; 6]$, seule la seconde intervient. Le coefficient dominant de B' étant négatif, B' est positive entre les racines, donc sur $[0; 4,83]$, et négative après.

q	0		4,83		6
signe de $B'(q)$		+	0	-	
variations de B	-8	croissante	maximum	décroissante	64

Le bénéfice est donc maximal pour $q = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4,83$ tonnes. Le bénéfice correspondant :

$$B(4,83) = -112,68 + 140,00 + 57,96 - 8 \approx 77 \text{ €}$$

Le contrôle de vraisemblance. $B(4) = -64 + 96 + 48 - 8 = 72 \text{ €}$ et

$B(5) = -125 + 150 + 60 - 8 = 77 \text{ €}$: le maximum est bien entre les deux, autour de 77 €.

Produire 6 tonnes ne rapporterait que $B(6) = -216 + 216 + 72 - 8 = 64 \text{ €}$.

Réponse. a) $B(q) = -q^3 + 6q^2 + 12q - 8$ — b) $B'(q) = -3q^2 + 12q + 12$, de racines $2 \pm 2\sqrt{2}$ — c) environ 4,83 tonnes, pour un bénéfice d'environ 77 €.

Correction de l'exercice 9 - Un minimum avec un terme en 1 sur x

a) On dérive terme par terme, avec $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$:

$$f(x) = 2x + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - \frac{2}{x^2}$$

On met au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{2x \times x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

b) Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur x^2 est strictement positif : le signe de f est celui du numérateur.

$$2x^3 - 2 = 2(x^3 - 1)$$

Or $x^3 - 1$ est négatif pour $x < 1$, nul en $x = 1$ et positif pour $x > 1$ (la fonction cube est croissante). Donc f est négative sur $]0; 1[$, nulle en 1, positive sur $]1; +\infty[$.

c) D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	
variations de f		décroissante	3	croissante	

avec $f(1) = 1 + 2 = 3$. Le **minimum** de f sur $]0; +\infty[$ est donc 3, atteint en $x = 1$.

Le contrôle. $f(0,5) = 0,25 + 4 = 4,25$ et $f(2) = 4 + 1 = 5$: les deux sont supérieurs à 3 ✓
La méthode « mettre au même dénominateur pour étudier le signe » est celle à retenir dès qu'un terme en $\frac{1}{x}$ apparaît.

Réponse. a) $f(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$ — b) négative sur $]0; 1[$, positive sur $]1; +\infty[$ — c) minimum 3 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 10 - Distance, vitesse et arrêts

a) La vitesse est la dérivée de la position :

$$v(t) = d'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3)$$

(le trinôme a pour somme de racines 4 et produit 3 : ses racines sont 1 et 3).

b) La vitesse est nulle lorsque $v(t) = 0$, donc aux instants

$$t = 1 \text{ s} \quad \text{et} \quad t = 3 \text{ s}$$

Ce sont les deux instants où le mobile **s'arrête** avant de repartir dans l'autre sens.

c) Le coefficient dominant de v est positif, donc v est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles. Les positions :

$$d(0) = 0 \quad ; \quad d(1) = 1 - 6 + 9 = 4 \quad ; \quad d(3) = 27 - 54 + 27 = 0 \quad ; \quad d(5) = 125 - 150 + 45 = 20$$

t	0		1		3		5
signe de $v(t)$		+	0	-	0	+	
variations de d	0	croissante	4	décroissante	0	croissante	20

Le mobile avance jusqu'à 4 m pendant la première seconde, **recule** ensuite jusqu'à revenir à son point de départ à $t = 3$ s, puis repart vers l'avant jusqu'à 20 m à $t = 5$ s.

La lecture physique. Une vitesse **négative** ne veut pas dire « lent » mais « en marche arrière ». C'est le signe de d' qui donne le sens du mouvement, et son annulation qui marque les changements de sens.

Réponse. a) $v(t) = 3(t - 1)(t - 3)$ — b) à $t = 1$ s et $t = 3$ s — c) le mobile avance (4 m), recule (retour à 0), puis avance jusqu'à 20 m.

Correction de l'exercice 11 - Le rectangle inscrit sous une parabole

a) Les deux sommets du bas sont en $-x$ et x : la largeur du rectangle est donc $2x$. Les sommets du haut sont sur la parabole, à l'ordonnée $9 - x^2$: c'est la hauteur. D'où

$$A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$$

b) On dérive :

$$A'(x) = 18 - 6x^2 = 6(3 - x^2)$$

Cette expression est positive lorsque $x^2 < 3$, c'est-à-dire $x < \sqrt{3}$ (puisque $x > 0$), et négative lorsque $x > \sqrt{3}$.

c) D'où le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{3}$		3
signe de $A'(x)$		+	0	-	
variations de A	0	croissante	$12\sqrt{3}$	décroissante	0

L'aire est maximale pour $x = \sqrt{3}$, et vaut alors

$$A(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}(9 - 3) = 12\sqrt{3} \approx 20,78$$

Le rectangle optimal a pour largeur $2\sqrt{3} \approx 3,46$ et pour hauteur $9 - 3 = 6$.

Le contrôle numérique. $A(1,5) = 3 \times 6,75 = 20,25$ et $A(2) = 4 \times 5 = 20$: les deux sont bien inférieurs à 20,78 ✓ L'optimum n'est pas un nombre « rond », et c'est précisément pour cela qu'on a besoin de la dérivation.

Réponse. a) largeur $2x$, hauteur $9 - x^2$, aire $A(x) = 18x - 2x^3$ — b) $A'(x) = 6(3 - x^2)$, positive avant $\sqrt{3}$, négative après — c) $x = \sqrt{3}$, aire maximale $12\sqrt{3} \approx 20,78$.

Correction de l'exercice 12 - Tangentes parallèles à une droite

a) Être parallèle à d signifie avoir le même coefficient directeur, soit 9. On résout donc $f(x) = 9$, avec $f(x) = 3x^2 - 3$:

$$3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

Les solutions sont $x = -2$ et $x = 2$: il y a **deux** points de contact.

b) On calcule les ordonnées, puis on applique la formule de la tangente.

— En $x = 2$: $f(2) = 8 - 6 = 2$, donc

$$y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 18 + 2 = 9x - 16$$

— En $x = -2$: $f(-2) = -8 + 6 = -2$, donc

$$y = 9(x + 2) - 2 = 9x + 18 - 2 = 9x + 16$$

c) Non. Les trois droites d , $y = 9x - 16$ et $y = 9x + 16$ ont le même coefficient directeur 9 mais des ordonnées à l'origine différentes (1, -16 et 16) : elles sont **strictement parallèles**, deux à deux sans point commun.

Pourquoi deux solutions. L'équation $f(x) = m$ est ici du **second degré** : elle peut avoir deux solutions. C'est ce qui distingue une fonction du troisième degré d'un trinôme, pour lequel $f(x) = m$ est du premier degré et n'a qu'une solution.

Réponse. a) $x = -2$ et $x = 2$ — b) $y = 9x + 16$ et $y = 9x - 16$ — c) non, elles sont strictement parallèles à d .

Correction de l'exercice 13 - L'emballage le plus économique

a) Le volume d'une boîte à base carrée est $V = x^2h$, d'où

$$x^2h = 500 \quad \text{donc} \quad h = \frac{500}{x^2}$$

La boîte étant sans couvercle, le carton couvre le fond (un carré de côté x) et les quatre faces latérales (des rectangles $x \times h$) :

$$S = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$$

b) On dérive, avec $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$:

$$S'(x) = 2x - \frac{2\,000}{x^2} = \frac{2x^3 - 2\,000}{x^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur est positif : le signe est celui de $2x^3 - 2\,000 = 2(x^3 - 1\,000)$. Or $x^3 - 1\,000$ s'annule pour $x = 10$, et la fonction cube étant croissante, l'expression est négative avant 10 et positive après.

c) D'où le tableau :

x	0		10		$+\infty$
signe de $S'(x)$		-	0	+	
variations de S		décroissante	300	croissante	

avec

$$S(10) = 100 + \frac{2\,000}{10} = 100 + 200 = 300 \text{ cm}^2$$

L'aire de carton est donc minimale pour une base de 10 cm de côté, et une hauteur

$$h = \frac{500}{100} = 5 \text{ cm}$$

soit 300 cm² de carton pour une boîte de 10 × 10 × 5 cm.

Le résultat à remarquer. La hauteur optimale est la **moitié** du côté de la base. C'est une règle générale pour une boîte à base carrée sans couvercle, et le fabricant d'emballages la connaît par cœur.

Réponse. a) $h = \frac{500}{x^2}$ et $S(x) = x^2 + \frac{2\,000}{x}$ — b) $S'(x) = \frac{2x^3 - 2\,000}{x^2}$, négative avant 10, positive après — c) base 10 cm, hauteur 5 cm, aire minimale 300 cm².

Correction de l'exercice 14 - Compléter un tableau de variations

a) On dérive puis on factorise :

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$$

b) Les racines de f sont -1 et 3 : toutes deux appartiennent à $[-2; 4]$, il faudra donc les deux dans le tableau.

c) Le coefficient dominant de f est positif, donc f est positive à l'extérieur des racines. On calcule les **quatre** valeurs utiles — les deux extremums et les deux bornes :

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10 \quad f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$$

$$f(4) = 64 - 48 - 36 + 5 = -15$$

x	-2		-1		3		4
signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	
variations de f	3	croissante	10	décroissante	-22	croissante	-15

d) On compare les quatre valeurs : 3, 10, -22 et -15.

Le **maximum** de f sur $[-2; 4]$ est 10, atteint en $x = -1$. Le **minimum** est -22, atteint en $x = 3$.

Pourquoi les bornes comptent. Ici les extremums locaux sont aussi les extremums globaux, mais ce n'est pas automatique : si l'intervalle avait été $[-2; 6]$, on aurait

$f(6) = 216 - 108 - 54 + 5 = 59 > 10$, et le maximum aurait été atteint à la borne droite.

Réponse. a) $f(x) = 3(x-3)(x+1) - b) -1$ et $3 - c) f(-2) = 3, f(-1) = 10, f(3) = -22, f(4) = -15 - d) \text{ maximum } 10 \text{ en } -1, \text{ minimum } -22 \text{ en } 3.$

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude et tracé

a) On dérive terme par terme, puis on factorise :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$$

b) Le coefficient dominant 3 est positif : f' est positive à l'extérieur des racines -1 et 3 , négative entre elles.

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10 \quad f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
variations de f		croissante	10	décroissante	-22	croissante	

La fonction admet donc un **maximum local** égal à 10 en $x = -1$, et un **minimum local** égal à -22 en $x = 3$.

c) En $a = 0$: $f(0) = 5$ et $f'(0) = 3 \times (-3) \times 1 = -9$, donc

$$y = -9(x-0) + 5 = -9x + 5$$

Contrôle : pour $x = 0, y = 5 = f(0)$ ✓

d) La tangente est horizontale là où $f'(x) = 0$, donc en $x = -1$ et $x = 3$. Le graphique le confirme : la courbe présente un sommet local en $x = -1$, à l'ordonnée 10, et un point bas en $x = 3$, à l'ordonnée -22 . Ce sont exactement les deux endroits où elle est momentanément « plate ».

e) Non. Sur $[-1; 3]$, la fonction est **décroissante** de 10 à -22 : elle ne prend donc que des valeurs comprises entre -22 et 10. Comme $15 > 10$, la valeur 15 n'est jamais atteinte sur cet intervalle. (Elle l'est en revanche une fois sur $[3; +\infty[$, car la fonction y croît de -22 vers des valeurs arbitrairement grandes : $f(5) = 125 - 75 - 45 + 5 = 10$ et $f(6) = 216 - 108 - 54 + 5 = 59$.)

Le bilan du chapitre. Dériver, factoriser, tableau de variations, valeurs remarquables, tangentes : cinq gestes qui répondent à toutes les questions — sens de variation, extremums, existence de solutions d'une équation, optimisation d'une grandeur. C'est l'outil le plus polyvalent du programme de Première.

Réponse. a) $f(x) = 3(x-3)(x+1) - b) \text{ maximum local } 10 \text{ en } -1, \text{ minimum local } -22 \text{ en } 3 - c) y = -9x + 5 - d) \text{ en } x = -1 \text{ et } x = 3 - e) \text{ non, car } f \text{ décroît de } 10 \text{ à } -22 \text{ sur } [-1; 3] \text{ et } 15 > 10.$