

Plaquette 2 - Tangentes à une courbe

Dérivation — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation de tangente : formule et méthodes.

- **Équation réduite de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Elle se lit ainsi : la droite passe par le point $A(a ; f(a))$ et a pour coefficient directeur $f'(a)$.

- **Les nombres dérivés utiles** (établis par le calcul du taux d'accroissement, plaquette 1) :

$$f(x) = mx + p \Rightarrow f'(x) = m \quad f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

- **Tangente horizontale** : elle a pour équation $y = f(a)$, et on la trouve en résolvant $f'(a) = 0$.
- **Tangente de coefficient directeur m** : on résout l'équation $f'(a) = m$. « Parallèle à la droite $y = mx + p$ » signifie exactement la même chose.
- **Lire une tangente tracée** : le point de contact donne $f(a)$ (son ordonnée), la pente de la droite donne $f'(a)$. On mesure la pente entre deux points à coordonnées entières.
- **Position relative** de la courbe et de sa tangente : on étudie le **signe de la différence** $f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$.
- **Le contrôle systématique**. Le point de contact doit appartenir à la tangente : en remplaçant x par a dans l'équation trouvée, on doit retrouver $f(a)$.

Correction de l'exercice 1 - Une première équation de tangente

- a) Les deux calculs, à ne pas confondre :

$$f(3) = 3^2 = 9 \quad f'(3) = 2 \times 3 = 6$$

$f(3) = 9$ est l'**ordonnée** du point de contact ; $f'(3) = 6$ est la **pente** de la tangente.

- b) On applique la formule du cours avec $a = 3$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = 6(x - 3) + 9$$

On développe pour obtenir l'équation réduite :

$$y = 6x - 18 + 9 = 6x - 9$$

- c) Le point de contact est $A(3 ; 9)$. En remplaçant x par 3 dans l'équation de la tangente :

$$y = 6 \times 3 - 9 = 18 - 9 = 9$$

On retrouve bien 9, l'ordonnée de A : le point appartient à la droite ✓

Le contrôle à faire à chaque fois. Remplacer x par a dans l'équation trouvée doit redonner $f(a)$. Ce test détecte immédiatement une erreur de signe dans le développement, la plus fréquente sur cet exercice.

Réponse. a) $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$ — b) $y = 6x - 9$ — c) pour $x = 3$, on trouve $y = 9 = f(3)$ ✓

Correction de l'exercice 2 - Tangente à un trinôme

a) On calcule séparément l'image et le nombre dérivé :

$$f(2) = 4 - 6 + 1 = -1 \quad f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$$

b) On applique la formule de la tangente avec $a = 2$:

$$y = f(2)(x - 2) + f'(2) = 1 \times (x - 2) + (-1)$$

$$y = x - 2 - 1 = x - 3$$

L'équation réduite de T est donc $y = x - 3$.

Contrôle : pour $x = 2$, $y = 2 - 3 = -1 = f(2)$ ✓

c) On teste les coordonnées de B dans l'équation de T : pour $x = 5$,

$$y = 5 - 3 = 2$$

L'ordonnée obtenue est bien 2, celle de B : le point $B(5; 2)$ **appartient** à la tangente T .

Attention à ne pas confondre deux appartenances. B appartient à la tangente, mais pas à la courbe : $f(5) = 25 - 15 + 1 = 11 \neq 2$. Une tangente ne touche la courbe qu'au point de contact (et parfois ailleurs, mais ce n'est pas le cas ici).

Réponse. a) $f(2) = -1$ et $f'(2) = 1$ — b) $y = x - 3$ — c) oui, car $5 - 3 = 2$.

Correction de l'exercice 3 - Tangente à la fonction cube

a) On calcule d'abord les deux nombres nécessaires, en soignant les signes :

$$f(-1) = (-1)^3 = -1 \quad f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3 \times 1 = 3$$

Puis on applique la formule avec $a = -1$ — attention, $x - a$ devient $x + 1$:

$$y = 3(x - (-1)) + (-1) = 3(x + 1) - 1 = 3x + 3 - 1 = 3x + 2$$

Contrôle : pour $x = -1$, $y = -3 + 2 = -1 = f(-1)$ ✓

b) En $a = 0$: $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3 \times 0 = 0$, donc

$$y = 0 \times (x - 0) + 0 = 0$$

La tangente en 0 est l'**axe des abscisses**, d'équation $y = 0$.

c) Cette tangente est **horizontale** (puisque $f'(0) = 0$), et pourtant la fonction cube n'a en 0 ni maximum ni minimum : elle est croissante avant comme après. Une tangente horizontale ne signale donc pas toujours un extremum — c'est un point important, sur lequel la plaquette 4 reviendra.

L'erreur de signe à surveiller. $(-1)^2 = +1$ (donc $f'(-1) = 3$, positif) alors que $(-1)^3 = -1$. Exposant pair : résultat positif ; exposant impair : le signe est conservé.

Réponse. a) $y = 3x + 2$ — b) $y = 0$ — c) la tangente est horizontale sans qu'il y ait d'extremum.

Correction de l'exercice 4 - Chercher une tangente horizontale

a) Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire lorsque

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

b) L'équation d'une tangente horizontale est $y = f(a)$. Ici :

$$f(3) = 9 - 18 + 5 = -4 \quad \text{donc} \quad y = -4$$

On peut aussi passer par la formule générale : $y = 0 \times (x - 3) + (-4) = -4$, ce qui donne le même résultat.

c) Le point $(3; -4)$ est le **sommet** de la parabole. Comme $a = 1 > 0$ dans le trinôme, c'est le point le plus bas de la courbe : -4 est le minimum de f , atteint en $x = 3$.

Le lien avec le chapitre du second degré. La formule $\alpha = -\frac{b}{2a}$ donne $\alpha = \frac{6}{2} = 3$: le même résultat. Ce n'est pas un hasard, car $f(x) = 2ax + b$ s'annule précisément en $x = -\frac{b}{2a}$. La dérivation retrouve la formule du sommet, et la généralise à toutes les fonctions.

Réponse. a) $a = 3$ — b) $y = -4$ — c) c'est le sommet de la parabole, où f atteint son minimum -4 .

Correction de l'exercice 5 - Tangente de coefficient directeur imposé

a) On cherche a tel que le nombre dérivé vaille 8 :

$$f'(a) = 8 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$$

b) Avec $a = 4$, on a $f(4) = 16$, d'où

$$y = 8(x - 4) + 16 = 8x - 32 + 16 = 8x - 16$$

Contrôle : pour $x = 4$, $y = 32 - 16 = 16 = f(4)$ ✓

c) Oui. On résout de la même façon :

$$f'(a) = -2 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$$

Le point cherché est donc celui d'abscisse -1 , d'ordonnée $f(-1) = 1$. L'équation de la tangente y est

$$y = -2(x + 1) + 1 = -2x - 1$$

Ce que montrent les deux questions. Sur la parabole $y = x^2$, **chaque** pente réelle est atteinte exactement une fois, puisque l'équation $2a = m$ a toujours une unique solution. Il n'existe donc jamais deux tangentes parallèles à cette courbe.

Réponse. a) $a = 4$ — b) $y = 8x - 16$ — c) oui, au point d'abscisse -1 , avec la tangente $y = -2x - 1$.

Correction de l'exercice 6 - Tangente parallèle à une droite donnée

a) Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le **même coefficient directeur**. Celui de d vaut 2, celui de la tangente vaut $f'(a)$, d'où la condition

$$f'(a) = 2 \Leftrightarrow 2a - 4 = 2$$

b) On résout : $2a = 6$, donc $a = 3$. L'ordonnée du point de contact est

$$f(3) = 9 - 12 = -3$$

L'équation de la tangente est alors

$$y = 2(x - 3) + (-3) = 2x - 6 - 3 = 2x - 9$$

Contrôle : pour $x = 3$, $y = 6 - 9 = -3 = f(3)$ ✓

c) Non. Les deux droites ont le même coefficient directeur 2, mais des ordonnées à l'origine différentes : -9 pour la tangente, $+7$ pour d . Elles sont donc **strictement parallèles**, sans aucun point commun.

La méthode générale. « Parallèle à » se traduit toujours par une égalité de coefficients

directeurs, donc par l'équation $f(a) = m$ où m est le coefficient de la droite donnée. L'ordonnée à l'origine de cette droite ne sert à rien pour trouver a — elle ne sert qu'à la question c).

Réponse. a) $f(a) = 2$, soit $2a - 4 = 2$ — b) $a = 3$ et $y = 2x - 9$ — c) non, les ordonnées à l'origine diffèrent (-9 et 7) : elles sont strictement parallèles.

Correction de l'exercice 7 - Lire $f(a)$ et $f'(a)$ sur une tangente

a) Le point A a pour abscisse 2 ; on lit son ordonnée : $f(2) = 1$.

b) On choisit deux points de T à coordonnées entières, par exemple $(0; -1)$ et $(4; 3)$. Le coefficient directeur vaut

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$$

D'après le cours, ce coefficient est le nombre dérivé :

$$f'(2) = 1$$

c) On applique la formule de la tangente avec $a = 2$, $f(2) = 1$ et $f'(2) = 1$:

$$y = 1 \times (x - 2) + 1 = x - 1$$

Vérification sur le graphique : la droite $y = x - 1$ coupe l'axe des ordonnées en -1 ✓ et passe par $(2; 1)$ ✓ La lecture est cohérente.

Les deux lectures à ne pas mélanger. $f(2)$ se lit **verticalement** (l'ordonnée du point de contact), $f'(2)$ se lit comme une **pente** (un déplacement vertical rapporté à un déplacement horizontal). Lire $f(2) = 1$ et $f'(2) = 1$ ici est une coïncidence numérique, pas une règle.

Réponse. a) $f(2) = 1$ — b) coefficient directeur 1 , donc $f'(2) = 1$ — c) $T: y = x - 1$.

Correction de l'exercice 8 - Retrouver $f(a)$ et $f'(a)$ à partir de deux points

a) Le coefficient directeur de la droite (PQ) se calcule avec les deux points donnés :

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

Cette droite étant la tangente au point d'abscisse 1 , on a $f'(1) = 2$.

b) L'ordonnée à l'origine se lit sur $P(0; -1)$: elle vaut -1 . L'équation réduite est donc

$$y = 2x - 1$$

Le point de contact a pour abscisse 1 , donc son ordonnée est celle de la tangente en $x = 1$:

$$f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

c) On ne peut pas l'affirmer. Le point $Q(2; 3)$ appartient à la **tangente**, mais rien ne dit qu'il appartienne à la courbe : la tangente et la courbe n'ont en commun que le point de contact, d'abscisse 1 . Il faudrait connaître l'expression de f pour calculer $f(2)$ et le vérifier.

La confusion à éviter absolument. « Le point appartient à la tangente » ne signifie pas « le point appartient à la courbe ». Seul le point de contact appartient aux deux, et c'est celui d'abscisse a .

Réponse. a) coefficient 2 , donc $f'(1) = 2$ — b) $y = 2x - 1$ et $f(1) = 1$ — c) non, Q est sur la tangente, pas nécessairement sur la courbe.

Correction de l'exercice 9 - Tangente à la fonction inverse

a) On applique les deux expressions, en soignant le carré au dénominateur :

$$f(2) = \frac{1}{2} = 0,5 \quad f(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

Le nombre dérivé est négatif, ce qui est cohérent : la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.

b) Avec $a = 2$:

$$y = -0,25(x - 2) + 0,5 = -0,25x + 0,5 + 0,5 = -0,25x + 1$$

Contrôle : pour $x = 2$, $y = -0,5 + 1 = 0,5 = f(2)$ ✓

c) Un point de l'axe des abscisses a une ordonnée nulle : on résout

$$-0,25x + 1 = 0 \Leftrightarrow 0,25x = 1 \Leftrightarrow x = 4$$

La tangente coupe l'axe des abscisses au point $(4; 0)$.

Une remarque géométrique. La courbe de la fonction inverse, elle, ne coupe **jamais** l'axe des abscisses (puisque $\frac{1}{x}$ ne s'annule pas). La tangente, en revanche, le coupe : elle s'écarte de la courbe dès qu'on s'éloigne du point de contact.

Réponse. a) $f(2) = 0,5$ et $f'(2) = -0,25$ — b) $y = -0,25x + 1$ — c) oui, au point $(4; 0)$.

Correction de l'exercice 10 - La courbe est-elle au-dessus de sa tangente ?

a) Avec $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$:

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$$

b) On calcule la différence entre l'ordonnée de la courbe et celle de la tangente :

$$f(x) - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Or un carré est toujours positif ou nul, donc

$$f(x) - (2x - 1) \geq 0 \quad \text{pour tout réel } x$$

avec égalité **uniquement** en $x = 1$.

c) La différence étant positive, l'ordonnée de la courbe est toujours supérieure à celle de la tangente : la courbe est **au-dessus** de T sur tout $\mathbb{R}$, et elle la touche seulement au point de contact $(1; 1)$.

Pourquoi ce résultat est général pour les paraboles. Pour n'importe quel trinôme avec $a > 0$, la différence courbe – tangente vaut $a(x - \alpha_0)^2$ où α_0 est l'abscisse du point de contact : la parabole est toujours au-dessus de chacune de ses tangentes. Pour $a < 0$, elle est toujours en dessous.

Réponse. a) $T: y = 2x - 1$ — b) $f(x) - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geq 0$ — c) la courbe est au-dessus de T , et la touche seulement en $(1; 1)$.

Correction de l'exercice 11 - Deux tangentes horizontales

a) On résout l'équation, en factorisant :

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$$

Les solutions sont donc $x = 1$ et $x = -1$.

b) Une tangente horizontale a pour équation $y = f(a)$. On calcule les deux ordonnées :

$$f(1) = 1 - 3 = -2 \quad f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) = -1 + 3 = 2$$

Les deux tangentes horizontales ont donc pour équations

$$y = -2 \quad \text{et} \quad y = 2$$

c) Non. Elles sont toutes les deux horizontales, donc **parallèles**, mais leurs ordonnées à l'origine diffèrent (-2 et 2) : ce sont deux droites distinctes, situées de part et d'autre de l'axe des abscisses.

Ce que cela annonce. Les points de contact $(-1; 2)$ et $(1; -2)$ sont respectivement un **maximum local** et un **minimum local** de f : la courbe monte, redescend, puis remonte. Contrairement à un trinôme, une fonction du troisième degré peut avoir deux extremums — la plaquette 4 le montrera avec le tableau de signes de f .

Réponse. a) $x = -1$ et $x = 1$ — b) $y = 2$ et $y = -2$ — c) non, elles sont parallèles mais distinctes.

Correction de l'exercice 12 - Tracer une tangente

a) On calcule les images et les nombres dérivés :

— en -2 : $f(-2) = 0,5 \times 4 = 2$ et $f'(-2) = -2$, donc

$$T_1: y = -2(x + 2) + 2 = -2x - 4 + 2 = -2x - 2$$

— en 2 : $f(2) = 2$ et $f'(2) = 2$, donc

$$T_2: y = 2(x - 2) + 2 = 2x - 4 + 2 = 2x - 2$$

b) On trace la parabole (sommet à l'origine, tournée vers le haut), puis chaque tangente à partir de deux de ses points : pour T_1 , les points $(-2; 2)$ et $(0; -2)$; pour T_2 , les points $(2; 2)$ et $(0; -2)$. Le tracé figure ci-dessous.

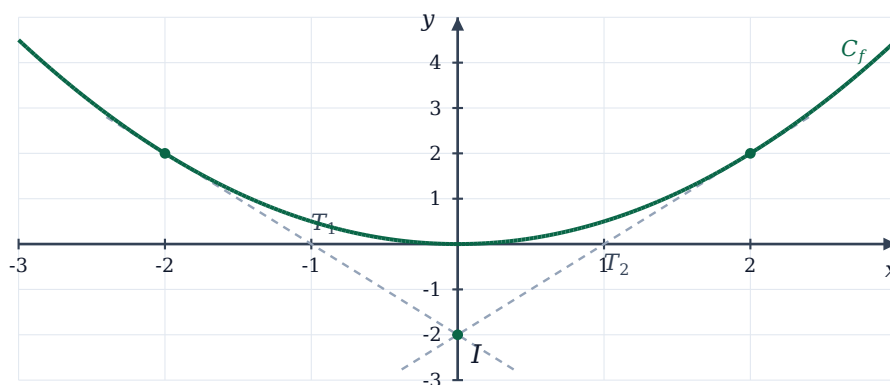
c) Les deux tangentes ont la même ordonnée à l'origine, -2 : elles se coupent donc au point

$$I(0; -2)$$

On le vérifie en résolvant $-2x - 2 = 2x - 2$, soit $-4x = 0$, donc $x = 0$ et $y = -2$.

Une propriété à remarquer. Les deux points de contact sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, et les deux tangentes le sont aussi : leurs pentes sont opposées. Leur point d'intersection se trouve donc **sur** l'axe de symétrie de la parabole.

Réponse. a) $T_1: y = -2x - 2$ et $T_2: y = 2x - 2$ — c) elles se coupent en $I(0; -2)$.



La parabole de $f(x) = 0,5x^2$ et ses tangentes en -2 et 2 .

Correction de l'exercice 13 - Le niveau d'un réservoir

a) Les deux calculs :

$$h(10) = 0,05 \times 100 - 40 + 80 = 5 + 40 = 45 \text{ cm}$$

$$h'(10) = 0,1 \times 10 - 4 = 1 - 4 = -3 \text{ cm/min}$$

$h(10) = 45 \text{ cm}$ est la **hauteur d'eau** au bout de 10 minutes. $h'(10) = -3 \text{ cm/min}$ est la **vitesse de variation** de cette hauteur à cet instant : le niveau baisse de 3 cm par minute. Le signe négatif traduit la vidange.

b) On applique la formule de la tangente avec $a = 10$:

$$y = -3(t - 10) + 45 = -3t + 30 + 45 = -3t + 75$$

c) La tangente sert d'approximation locale. Pour $t = 11$:

$$y = -3 \times 11 + 75 = -33 + 75 = 42 \text{ cm}$$

La valeur exacte est

$$h(11) = 0,05 \times 121 - 44 + 80 = 6,05 + 36 = 42,05 \text{ cm}$$

L'estimation par la tangente donne 42 cm contre 42,05 cm : l'écart est de 0,5 mm, négligeable pour une prévision à une minute.

L'usage pratique. La tangente permet de prévoir « à court terme » sans refaire tout le calcul : il suffit de la hauteur actuelle et de la vitesse actuelle. C'est exactement ce que fait un tableau de bord.

Réponse. a) $h(10) = 45 \text{ cm}$ (hauteur) et $h'(10) = -3 \text{ cm/min}$ (vitesse de baisse) — b) $y = -3t + 75$ — c) estimation 42 cm contre 42,05 cm exacts.

Correction de l'exercice 14 - Quand la tangente recoupe la courbe

a) On calcule $f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f'(1) = 3 - 3 = 0$. La tangente est donc horizontale :

$$T: y = 0 \times (x - 1) + (-2) = -2$$

b) Les points communs à la courbe et à T ont pour ordonnée -2 , donc leurs abscisses vérifient

$$x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

On sait déjà que $x = 1$ est solution (c'est le point de contact), donc l'expression se factorise par $(x - 1)$. En développant, on vérifie que

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

En effet : $(x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2$
✓

Les solutions sont donc $x = 1$ (racine double, le point de contact) et $x = -2$. Les points communs sont $(1; -2)$ et $(-2; -2)$.

c) Cette idée est **fausse en général**. Une tangente touche la courbe au point de contact, mais rien ne l'empêche de la recouper ailleurs : ici, la tangente horizontale $y = -2$ passe par le minimum local en $x = 1$ **et** retransverse la courbe en $x = -2$. La tangence est une propriété **locale**, au voisinage du point de contact.

Le vocabulaire. « Tangente » décrit le contact en un point, pas le comportement global. Pour une parabole, la tangente ne recoupe effectivement jamais la courbe ; pour une fonction du troisième degré, c'est fréquent.

Réponse. a) $T: y = -2$ — b) $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$, donc les points communs sont

(1 ; -2) et (-2 ; -2) — c) une tangente peut recouper la courbe ailleurs.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : trois tangentes à une même parabole

a) On calcule à chaque fois l'image et le nombre dérivé, puis on applique la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

— En $a = 0$: $f(0) = -3$ et $f'(0) = -2$, donc

$$T_0: y = -2(x - 0) + (-3) = -2x - 3$$

— En $a = 1$: $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$ et $f'(1) = 0$, donc

$$T_1: y = 0 \times (x - 1) - 4 = -4$$

— En $a = 3$: $f(3) = 9 - 6 - 3 = 0$ et $f'(3) = 4$, donc

$$T_3: y = 4(x - 3) + 0 = 4x - 12$$

b) C'est T_1 , d'équation $y = -4$, qui est horizontale, puisque $f'(1) = 0$. Son point de contact (1 ; -4) est le **sommet** de la parabole : -4 est le minimum de f , atteint en $x = 1$.

c) On résout l'égalité des deux ordonnées :

$$-2x - 3 = 4x - 12 \Leftrightarrow -2x - 4x = -12 + 3 \Leftrightarrow -6x = -9 \Leftrightarrow x = 1,5$$

Puis $y = -2 \times 1,5 - 3 = -3 - 3 = -6$. Le point d'intersection est donc

$$I(1,5; -6)$$

Contrôle avec T_3 : $4 \times 1,5 - 12 = 6 - 12 = -6$ ✓

d) La moyenne des deux abscisses de contact vaut

$$\frac{0 + 3}{2} = 1,5$$

C'est bien l'abscisse de I . Cette propriété est générale pour une parabole : les tangentes en deux points d'abscisses u et v se coupent toujours à l'abscisse $\frac{u+v}{2}$.

Le bilan de la plaquette. Une tangente, c'est un point et une pente : $f(a)$ et $f'(a)$. Toutes les questions du chapitre s'y ramènent — écrire l'équation, chercher une tangente horizontale ($f'(a) = 0$), une tangente de pente donnée ($f'(a) = m$), ou lire une tangente tracée.

Réponse. a) $T_0: y = -2x - 3$, $T_1: y = -4$, $T_3: y = 4x - 12$ — b) T_1 , dont le point de contact (1 ; -4) est le sommet — c) $I(1,5; -6)$ — d) $\frac{0+3}{2} = 1,5$ ✓