

Plaquette 4 - Variations et extremums

Dérivation — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Du signe de la dérivée aux variations.

- **Théorème.** Soit f dérivable sur un intervalle I .

$$f'(x) \geq 0 \text{ sur } I \Rightarrow f \text{ est croissante sur } I$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ sur } I \Rightarrow f \text{ est décroissante sur } I$$

Si f' est **strictement** positive (sauf éventuellement en des points isolés), la croissance est stricte.

- **Extremum local.** Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a :

$$f' \text{ passe de } - \text{ à } + \Rightarrow \text{minimum local} \quad f' \text{ passe de } + \text{ à } - \Rightarrow \text{maximum local}$$

- **⚠ Une dérivée nulle ne suffit pas.** Pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe : f est croissante sur $\mathbb{R}$ et n'a aucun extremum.
- **Méthode en cinq étapes.** 1. calculer $f'(x)$; 2. **factoriser** $f'(x)$ ou en chercher les racines ; 3. dresser le tableau de signes de f' ; 4. en déduire les flèches de f' ; 5. calculer les valeurs de f aux bornes et aux extremums — avec f , pas avec f' .
- **Optimiser une grandeur.** On exprime la grandeur à optimiser par une fonction, on précise son **domaine**, on dérive, on dresse le tableau de variations, puis on conclut par une phrase avec les unités.
- **Extremum global.** Sur un intervalle fermé $[a; b]$, il faut comparer les valeurs aux extremums **locaux** et aux **bornes** : le maximum global peut être atteint en a ou en b .

Correction de l'exercice 1 - Variations d'un trinôme par la dérivée

a) La dérivée est

$$f'(x) = 2x - 6$$

C'est une fonction affine croissante, qui s'annule pour $2x - 6 = 0$, soit $x = 3$. Elle est donc négative avant 3 et positive après.

b) On applique le théorème du cours : f décroît là où $f' \leq 0$ et croît là où $f' \geq 0$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	
variations de f		décroissante	-5	croissante	

La valeur au sommet se calcule avec f :

$$f(3) = 9 - 18 + 4 = -5$$

c) La fonction admet donc un **minimum** égal à -5 , atteint en $x = 3$.

Le contrôle par le second degré. La formule $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ donne le même résultat : la dérivation retrouve le sommet de la parabole, ce qui est rassurant. Son avantage est de fonctionner pour **toutes** les fonctions, pas seulement les trinômes.

L'erreur de tableau. Écrire $f(3) = 0$ sur la ligne des variations : cette ligne porte les valeurs de f , donc -5 , et non celles de f' .

Réponse. a) $f(x) = 2x - 6$, négative avant 3, positive après — b) décroissante puis croissante — c) minimum -5 atteint en $x = 3$.

Correction de l'exercice 2 - Un trinôme tourné vers le bas

a) La dérivée est

$$g'(x) = -4x + 8$$

Elle s'annule pour $-4x + 8 = 0$, soit $x = 2$. Le coefficient de x étant **négatif**, g' est positive avant 2 et négative après — c'est l'inverse du cas précédent.

b) Le tableau de variations découle du signe de g' :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $g'(x)$		+	0	−	
variations de g		croissante	5	décroissante	

La valeur au sommet :

$$g(2) = -2 \times 4 + 16 - 3 = -8 + 13 = 5$$

c) La fonction g admet un **maximum** égal à 5, atteint en $x = 2$. C'est un maximum et non un minimum parce que g' passe du + au − : la fonction monte puis descend.

Le réflexe de lecture. Le signe de g' **avant** le point d'annulation suffit à savoir de quel extremum il s'agit : g' positive avant signifie que la fonction monte d'abord, donc que l'extremum est un maximum.

Réponse. a) $g'(x) = -4x + 8$, nulle en $x = 2$ — b) croissante puis décroissante — c) maximum 5 atteint en $x = 2$.

Correction de l'exercice 3 - Deux extremums pour une fonction du troisième degré

a) La dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 3$, que l'on factorise :

$$f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

b) Le trinôme f' a pour racines -1 et 1 , avec un coefficient dominant positif : il est donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
variations de f		croissante	2	décroissante	-2	croissante	

Les deux valeurs se calculent avec f :

$$f(-1) = -1 + 3 = 2 \quad f(1) = 1 - 3 = -2$$

c) La dérivée passe du + au − en $x = -1$: f y admet un **maximum local** égal à 2. Elle passe du − au + en $x = 1$: f y admet un **minimum local** égal à -2 .

Pourquoi « local ». Le maximum local 2 n'est pas le plus grand des valeurs de f : pour $x = 3$, on a $f(3) = 27 - 9 = 18 > 2$. Une fonction du troisième degré n'a ni maximum ni minimum global sur $\mathbb{R}$: elle prend des valeurs aussi grandes et aussi petites que l'on veut.

Réponse. a) $f(x) = 3(x-1)(x+1)$ — b) croissante, décroissante, croissante — c) maximum local 2 en $x = -1$, minimum local -2 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 4 - Une dérivée à racines non entières symétriques

a) On dérive terme par terme :

$$f(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$

Le trinôme entre parenthèses a pour somme de racines 1 et pour produit -2 : ses racines sont 2 et -1 . D'où

$$f(x) = 6(x-2)(x+1)$$

(Contrôle par le discriminant : $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $x = \frac{1 \pm 3}{2}$, soit 2 et -1 ✓)

b) Le coefficient dominant de f étant positif, f est positive à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	
variations de f		croissante	8	décroissante	-19	croissante	

c) Les deux valeurs, calculées avec f :

$$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8 \quad f(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$$

Donc f admet un **maximum local** de 8 en $x = -1$ et un **minimum local** de -19 en $x = 2$.

L'erreur la plus fréquente. Calculer $f(-1)$ au lieu de $f(1)$ pour remplir le tableau : on obtiendrait 0, ce qui n'a aucun sens comme valeur de la fonction. Le tableau de variations porte les valeurs de f .

Réponse. a) $f(x) = 6(x-2)(x+1)$ — b) croissante, décroissante, croissante — c) maximum local 8 en -1 , minimum local -19 en 2.

Correction de l'exercice 5 - Une dérivée qui se factorise par x

a) La dérivée est $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Tous les termes contiennent x , on le met donc en facteur :

$$f'(x) = 3x(x+2)$$

b) Les racines de f' sont 0 et -2 , et le coefficient dominant 3 est positif : f' est positive à l'extérieur, négative entre les racines.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
variations de f		croissante	4	décroissante	0	croissante	

Les valeurs :

$$f(-2) = -8 + 12 = 4 \quad f(0) = 0$$

c) f admet un **maximum local** égal à 4 en $x = -2$, et un **minimum local** égal à 0 en $x = 0$.

L'erreur à éviter au moment de factoriser. Diviser $3x^2 + 6x = 0$ par x pour obtenir $3x + 6 = 0$, soit $x = -2$ seulement : on perdrait la racine $x = 0$, donc tout un morceau du tableau. Devant une équation dont les termes contiennent tous x , on factorise.

Réponse. a) $f'(x) = 3x(x+2)$ — b) croissante, décroissante, croissante — c) maximum local 4 en -2 , minimum local 0 en 0.

Correction de l'exercice 6 - Quand la dérivée s'annule sans extremum

a) La dérivée est

$$f'(x) = 3x^2$$

Un carré est toujours positif ou nul, donc $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x , avec $f'(0) = 0$ comme seul point d'annulation.

b) La dérivée étant positive sur $\mathbb{R}$, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	+	
variations de f		croissante	0	croissante	

La flèche ne change pas de sens en 0 : c'est une **seule** flèche montante, qui traverse la valeur 0.

c) Non. Le cours précise qu'un extremum apparaît lorsque f' s'annule **en changeant de signe**. Ici f' est positive avant comme après 0 : elle ne change pas de signe, donc il n'y a pas d'extremum. En $x = 0$, la tangente est horizontale (c'est l'axe des abscisses) mais la courbe continue de monter — on parle de **point d'inflexion**.

Le contre-exemple à retenir. « $f'(a) = 0$ » ne signifie pas « f a un extremum en a ». C'est le **changement de signe** qui compte, et c'est pourquoi on dresse toujours le tableau de signes de f' avant de conclure.

Réponse. a) $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ — b) croissante sur $\mathbb{R}$ — c) non, f ne change pas de signe en 0.

Correction de l'exercice 7 - Variations sur un intervalle fermé

a) La dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$. Sur l'intervalle $[0 ; 4]$, le facteur $x + 2$ est toujours **positif** : le signe de f' est donc celui de $x - 2$. Ainsi f' est négative sur $[0 ; 2]$ et positive sur $[2 ; 4]$.

b) On calcule les trois valeurs utiles : les deux bornes et l'extremum.

$$f(0) = 0 \quad f(2) = 8 - 24 = -16 \quad f(4) = 64 - 48 = 16$$

x	0		2		4
signe de $f'(x)$		—	0	+	
variations de f	0	décroissante	-16	croissante	16

c) Le **minimum** est -16, atteint en $x = 2$. Le **maximum** est 16, atteint en $x = 4$ — c'est-à-dire à une **borne** de l'intervalle, et non en un point où la dérivée s'annule.

Ce que l'exercice apprend. Sur un intervalle fermé, il faut comparer les extremums locaux **et** les valeurs aux bornes. Ici $f(0) = 0$ et $f(4) = 16$: le maximum est atteint au bord. Oublier les bornes est l'erreur type des problèmes d'optimisation.

Le rôle du domaine. La racine $x = -2$ de f' n'appartient pas à $[0 ; 4]$: on l'écarte, mais il faut penser à vérifier le signe du facteur correspondant sur l'intervalle étudié.

Réponse. a) $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$, négative sur $[0 ; 2]$, positive sur $[2 ; 4]$ — b) $f(0) = 0$, $f(2) = -16$, $f(4) = 16$ — c) minimum -16 en 2, maximum 16 en 4.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre une inéquation sur la dérivée

a) On dérive puis on factorise :

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

Le trinôme a pour somme de racines 2 et produit -3 : ses racines sont 3 et -1 . D'où

$$f(x) = 3(x - 3)(x + 1)$$

b) Le coefficient dominant 3 est positif, donc le trinôme est positif **à l'extérieur** des racines :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inégalité étant large, les racines sont incluses :

$$S =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$$

c) D'après le théorème du cours, f est croissante exactement là où $f' \geq 0$: sur $]-\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty[$. Elle est décroissante sur $]-1; 3]$.

Le point de rédaction. On écrit « croissante sur $]-\infty; -1]$ **et** sur $[3; +\infty[$ », et non « croissante sur l'union des deux ». Une fonction n'est pas croissante sur une réunion d'intervalles disjoints : entre -1 et 3 , elle redescend, et $f(-1) = 5$ est bien supérieur à $f(4) = -20$.

Réponse. a) $f(x) = 3(x - 3)(x + 1)$ — b) $S =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$ — c) f croît sur $]-\infty; -1]$ et sur $[3; +\infty[$.

Correction de l'exercice 9 - Du tableau de variations au signe de la dérivée

a) On applique le théorème du cours dans le sens « variations $\Rightarrow$ signe » :

$$f \text{ croissante} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad f \text{ décroissante} \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$$

- sur $[-2; 1]$, f croît, donc $f'(x) \geq 0$;
- sur $[1; 4]$, f décroît, donc $f'(x) \leq 0$;
- sur $[4; 5]$, f croît, donc $f'(x) \geq 0$.

b) La dérivée s'annule aux deux extremums locaux, là où les flèches changent de sens :

$$f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(4) = 0$$

c) Il faut comparer **toutes** les valeurs du tableau, extremums locaux et bornes :

$$f(-2) = -3 \quad ; \quad f(1) = 6 \quad ; \quad f(4) = -1 \quad ; \quad f(5) = 2$$

La plus grande est 6 : le **maximum** de f sur $[-2; 5]$ est 6, atteint en $x = 1$. La plus petite est -3 : le **minimum** est -3 , atteint en $x = -2$, donc à la borne gauche.

Le piège de la question c). Le minimum **local** -1 (en $x = 4$) n'est pas le minimum de la fonction sur l'intervalle : la valeur -3 à la borne est plus petite. Un tableau de variations se lit en entier.

Réponse. a) $f' \geq 0$, puis ≤ 0 , puis ≥ 0 — b) en $x = 1$ et $x = 4$ — c) maximum 6 en $x = 1$, minimum -3 en $x = -2$.

Correction de l'exercice 10 - Un extremum avec la fonction inverse

a) On dérive terme par terme, avec $(x)' = 1$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

On met au même dénominateur pour obtenir la forme demandée :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

b) Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur x^2 est strictement positif : le signe de f est donc celui du numérateur $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Comme $x > 0$, le facteur $x + 1$ est positif, et le signe est celui de $x - 1$:

$$f(x) < 0 \text{ sur }]0; 1[\quad f(1) = 0 \quad f(x) > 0 \text{ sur }]1; +\infty[$$

c) Le tableau de variations s'en déduit :

x	0		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		-	0	+	
variations de f		décroissante	2	croissante	

avec $f(1) = 1 + 1 = 2$. La fonction admet donc un **minimum** égal à 2, atteint en $x = 1$.

Le résultat, remarquable. Pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$: la somme d'un nombre positif et de son inverse est toujours au moins 2, avec égalité seulement pour $x = 1$. Le contrôle : $f(0,5) = 2,5$ et $f(2) = 2,5$ ✓ — les deux sont bien supérieurs à 2.

Réponse. a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ — b) négative sur $]0; 1[$, positive sur $]1; +\infty[$ — c) minimum 2 atteint en $x = 1$.

Correction de l'exercice 11 - La boîte de volume maximal

a) Après découpe et pliage, la hauteur de la boîte est x et le fond est un carré de côté $12 - 2x$ (on retire x de chaque côté). Pour que la boîte existe, il faut $x > 0$ et $12 - 2x > 0$, soit

$$0 < x < 6$$

b) Le volume d'un pavé est le produit de l'aire du fond par la hauteur :

$$V(x) = (12 - 2x)^2 \times x$$

On développe le carré, puis on distribue :

$$(12 - 2x)^2 = 144 - 48x + 4x^2 \quad \text{donc} \quad V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

soit $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

c) On dérive, puis on factorise :

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$$

Sur $]0; 6[$, le facteur $x - 6$ est **négatif** : le signe de V' est donc l'opposé de celui de $x - 2$.

x	0		2		6
signe de $V'(x)$		+	0	-	
variations de V		croissante	128	décroissante	

Le volume est donc maximal pour $x = 2$ cm, et vaut

$$V(2) = (12 - 4)^2 \times 2 = 64 \times 2 = 128 \text{ cm}^3$$

La boîte optimale mesure 8 cm $\times$ 8 cm $\times$ 2 cm.

Pourquoi la racine 6 est écartée. Elle est à la borne du domaine, où le fond est réduit à un point et le volume nul. C'est le domaine, et non le calcul, qui tranche : il faut toujours le préciser avant de dériver.

Réponse. a) fond $12 - 2x$, hauteur x , avec $0 < x < 6$ — b)

$V(x) = (12 - 2x)^2 x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ — c) $x = 2$ cm pour un volume maximal de 128 cm^3 .

Correction de l'exercice 12 - Le bénéfice maximal d'un atelier

a) On dérive terme par terme :

$$B'(q) = -3q^2 + 18q - 15 = -3(q^2 - 6q + 5)$$

Le trinôme entre parenthèses a pour somme de racines 6 et produit 5 : ses racines sont 1 et 5. D'où

$$B'(q) = -3(q - 1)(q - 5)$$

b) Le coefficient dominant de B' est -3 , négatif : le trinôme est donc négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles. On calcule les quatre valeurs utiles :

$$B(0) = 10 \quad ; \quad B(1) = -1 + 9 - 15 + 10 = 3 \quad ; \quad B(5) = -125 + 225 - 75 + 10 = 35 \quad ; \quad B(7) = -343 + 441 - 105 + 10 = 3$$

q	0		1		5		7
signe de $B'(q)$		—	0	+	0	—	
variations de B	10	décroissante	3	croissante	35	décroissante	3

c) Le maximum du tableau est 35, atteint en $q = 5$: il faut produire 5 **tonnes** pour un bénéfice maximal de 35 milliers d'euros, soit 35 000 €.

La lecture complète du tableau. Le bénéfice commence par **baissier** (de 10 à 3 entre $q = 0$ et $q = 1$), ce qui est contre-intuitif : les premières tonnes coûtent plus qu'elles ne rapportent. Il faut dépasser $q = 1$ pour que la production devienne rentable, et ne pas dépasser 5 tonnes.

Réponse. a) $B'(q) = -3(q - 1)(q - 5)$ — b) décroissante, croissante, décroissante — c) 5 tonnes pour un bénéfice maximal de 35 000 €.

Correction de l'exercice 13 - Minimiser un coût moyen

a) On divise chaque terme du numérateur par q :

$$M(q) = \frac{q^2 + 4q + 36}{q} = \frac{q^2}{q} + \frac{4q}{q} + \frac{36}{q} = q + 4 + \frac{36}{q}$$

Cette écriture est celle qui permet de dériver avec les formules du programme : une somme de trois termes, dont le dernier est un multiple de $\frac{1}{q}$.

b) On dérive terme par terme :

$$M'(q) = 1 + 0 + 36 \times \left(-\frac{1}{q^2}\right) = 1 - \frac{36}{q^2} = \frac{q^2 - 36}{q^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur est positif : le signe est celui de $q^2 - 36 = (q - 6)(q + 6)$. Le facteur $q + 6$ étant positif, le signe est celui de $q - 6$: M' est négative avant 6, positive après.

c) D'où le tableau de variations :

q	0		6		$+\infty$
signe de $M'(q)$		—	0	+	
variations de M		décroissante	16	croissante	

avec

$$M(6) = 6 + 4 + \frac{36}{6} = 6 + 4 + 6 = 16$$

Le coût moyen est donc minimal pour une production de 6 **tonnes**, et vaut alors 16 **€ par tonne**.

Le contrôle par le coût total. $C(6) = 36 + 24 + 36 = 96$ €, et $\frac{96}{6} = 16$ € par tonne ✓
Produire moins ($M(3) = 3 + 4 + 12 = 19$ €) ou plus ($M(9) = 9 + 4 + 4 = 17$ €) coûte davantage par tonne.

Réponse. a) en divisant chaque terme par q — b) $M'(q) = 1 - \frac{36}{q^2}$, négative avant 6, positive après — c) 6 tonnes, pour un coût moyen minimal de 16 € la tonne.

Correction de l'exercice 14 - L'enclos au bord d'une rivière

a) Si x est le côté parallèle à la rivière et p la profondeur, l'aire imposée donne

$$x \times p = 800 \quad \text{donc} \quad p = \frac{800}{x}$$

La clôture couvre le côté parallèle à la rivière et les **deux** côtés perpendiculaires :

$$L(x) = x + 2p = x + \frac{1\,600}{x}$$

b) On dérive, avec $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$:

$$L'(x) = 1 - \frac{1\,600}{x^2} = \frac{x^2 - 1\,600}{x^2}$$

Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur est positif, donc le signe est celui de $x^2 - 1\,600 = (x - 40)(x + 40)$. Le facteur $x + 40$ étant positif, le signe est celui de $x - 40$.

c) D'où le tableau :

x	0		40		$+\infty$
signe de $L'(x)$		−	0	+	
variations de L		décroissante	80	croissante	

avec

$$L(40) = 40 + \frac{1\,600}{40} = 40 + 40 = 80 \text{ m}$$

La clôture est donc minimale pour $x = 40$ m, avec une profondeur $p = \frac{800}{40} = 20$ m : l'enclos optimal mesure 40 m $\times$ 20 m et demande 80 m de clôture.

Le résultat à remarquer. Le côté parallèle à la rivière est **deux fois** la profondeur : la longueur de clôture se répartit à égalité entre le côté long (40 m) et les deux côtés courts ($2 \times 20 = 40$ m). C'est une règle générale pour ce type de problème.

Réponse. a) $p = \frac{800}{x}$ et $L(x) = x + \frac{1\,600}{x}$ — b) $L'(x) = 1 - \frac{1\,600}{x^2}$, négative avant 40, positive après — c) 40 m sur 20 m, pour 80 m de clôture.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une fonction à trois extremums

a) On dérive terme par terme, avec $(x^4)' = 4x^3$:

$$f(x) = 4x^3 - 16x$$

On met $4x$ en facteur, puis on reconnaît une différence de carrés :

$$f(x) = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$$

b) Les racines de f sont -2 , 0 et 2 . On étudie le signe de chaque facteur, puis celui du produit.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4x$		-	-	-	0	+	+	+	
$x - 2$		-	-	-	-	-	0	+	
$x + 2$		-	0	+	+	+	+	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Les valeurs de f aux trois points :

$$f(-2) = 16 - 32 = -16 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = 16 - 32 = -16$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
variations de f		décroissante	-16	croissante	0	décroissante	-16	croissante	

c) Trois extremums locaux, en alternance :

- en $x = -2$, f passe du $-$ au $+$: **minimum local** égal à -16 ;
- en $x = 0$, f passe du $+$ au $-$: **maximum local** égal à 0 ;
- en $x = 2$, f passe du $-$ au $+$: **minimum local** égal à -16 .

d) La fonction admet un **minimum global** égal à -16 , atteint **deux fois**, en $x = -2$ et en $x = 2$: aucune valeur de f n'est inférieure à -16 . En revanche elle n'a **pas** de maximum global : pour x grand, x^4 l'emporte sur $8x^2$ et $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut ($f(10) = 10\,000 - 800 = 9\,200$). Le maximum local 0 en $x = 0$ n'est donc qu'un maximum **local**.

Le bilan du chapitre. Dériver, factoriser, dresser le tableau de signes, lire les variations, calculer les valeurs avec f : cinq étapes qui répondent à toutes les questions de variations et à tous les problèmes d'optimisation. Et la symétrie de cette fonction ($f(-x) = f(x)$) explique que les deux minimums soient égaux.

Réponse. a) $f(x) = 4x(x - 2)(x + 2)$ — b) $-$, $+$, $-$, $+$ — c) minimums locaux -16 en ± 2 , maximum local 0 en 0 — d) minimum global -16 , pas de maximum global.