

Plaquette 3 - Fonction dérivée et formules de calcul

Dérivation — Première générale

Exercices

Méthode

Calculer un nombre dérivé avec le taux d'accroissement est instructif mais lent. On rassemble donc tous les nombres dérivés d'une fonction en une **nouvelle fonction**, la fonction dérivée f' , et on la calcule avec des **formules** : celles des fonctions usuelles (x^n , $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$) et les deux règles d'opération qui suffisent en Première générale, la somme et le produit par un nombre. Le geste est alors mécanique : on dérive terme par terme, en se rappelant qu'une constante disparaît et qu'un terme en x devient son coefficient. Trois erreurs sont traquées dans toute la plaquette : garder le terme constant, oublier de multiplier par l'exposant, et laisser un x dans la dérivée d'un terme du premier degré.

Exercice 1 - Dériver des monômes

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 5x^3$

b) $g(x) = -2x^2$

c) $h(x) = 7x$

d) $k(x) = 4$

Exercice 2 - Dériver un polynôme du troisième degré

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

a) Déterminer $f'(x)$.

b) Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

c) Que peut-on dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 ?

Exercice 3 - Des coefficients décimaux

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 1$

b) $g(x) = -0,2x^3 + 1,5x^2$

c) $h(x) = \frac{x^2}{4} + 6$

Exercice 4 - Développer avant de dériver

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)(x - 3)$.

a) Développer et réduire $f(x)$.

b) En déduire $f'(x)$.

c) Calculer $f'(1)$ et interpréter le résultat.

Exercice 5 - Dériver l'inverse et la racine carrée

- a) Déterminer la dérivée de f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x}$.
- b) Déterminer la dérivée de g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$, puis calculer $g'(4)$.
- c) Quel est le signe de f' ? de g' ? Qu'en déduit-on ?

Exercice 6 - Calculer un nombre dérivé par substitution

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- a) Déterminer $f'(x)$.
- b) Calculer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
- c) En quels points la tangente à la courbe est-elle horizontale ?

Exercice 7 - Résoudre une équation portant sur la dérivée

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x$.

- a) Déterminer $f'(x)$.
- b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
- c) Résoudre l'équation $f'(x) = 15$.

Exercice 8 - Repérer et corriger une erreur de dérivation

Un élève propose les dérivations suivantes. Pour chacune, dire si elle est correcte et, sinon, donner la dérivée exacte en expliquant l'erreur.

- a) $(x^2 + 3x)' = 2x + 3x$
- b) $(x^3 - 7)' = 3x^2 - 7$
- c) $(4x^2)' = 8x$
- d) $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

Exercice 9 - Dériver des puissances plus grandes

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = x^4$
- b) $g(x) = x^5$
- c) $h(x) = 2x^4 - 3x^2 + 7$
- d) $k(x) = \frac{x^4}{2} - x^3$

Exercice 10 - Le coût marginal d'un atelier

Le coût total de production, en euros, de q tonnes d'un produit est

$$C(q) = 0,1q^3 - 1,5q^2 + 10q + 50 \quad \text{pour } 0 \leq q \leq 15$$

- a) Déterminer $C'(q)$.

- b) Calculer $C'(5)$ et interpréter le résultat.
 c) Comparer $C'(5)$ au coût réel de la sixième tonne, $C(6) - C(5)$.

Exercice 11 - Une tangente calculée avec la dérivée

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$.

- a) Déterminer $f'(x)$.
 b) Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.
 c) Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -1 . Que remarque-t-on ?

Exercice 12 - Un tableau de dérivées à compléter

Recopier et compléter le tableau suivant.

$f(x)$	$x^2 - 5x$	$-3x^3$	$\frac{2}{x}$	$6x + 1$	$2\sqrt{x}$
$f'(x)$	?	?	?	?	?

Exercice 13 - Retrouver les coefficients d'une fonction

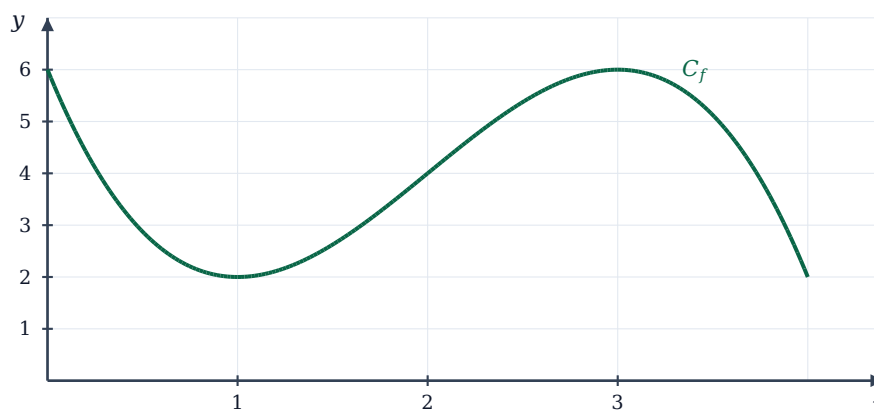
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + 1$, où a et b sont deux réels. On sait que $f(1) = 4$ et $f'(1) = 5$.

- a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .
 b) Traduire les deux conditions de l'énoncé par un système de deux équations.
 c) Résoudre ce système et donner l'expression de f .

Exercice 14 - Signe de la dérivée sur un graphique

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f dérivable sur $[0 ; 4]$.

- a) Déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels f est croissante, puis ceux sur lesquels elle est décroissante.
 b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun de ces intervalles.
 c) En quelles valeurs f s'annule-t-elle ?



La courbe de f sur $[0 ; 4]$.

Exercice 15 - Synthèse : dériver puis exploiter

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- a) Déterminer $f'(x)$ et le factoriser.
- b) Résoudre $f'(x) = 0$ et donner les points de la courbe où la tangente est horizontale.
- c) Donner les équations de ces tangentes horizontales.
- d) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.