

# Plaquette 1 - Taux de variation et nombre dérivé

## Dérivation — Première générale

### Exercices

#### Méthode

Tout le chapitre part d'un seul quotient, le **taux de variation**  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  : c'est la variation de la fonction rapportée à la variation de  $x$ , autrement dit la pente de la droite qui joint deux points de la courbe. Quand on rapproche  $b$  de  $a$  — en écrivant  $b = a + h$  et en faisant tendre  $h$  vers 0 —, ce quotient se stabilise sur un nombre : le **nombre dérivé**  $f'(a)$ . La technique de calcul est toujours la même : former le quotient  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , **développer**, **simplifier par  $h$**  (c'est l'étape clé, elle est toujours possible), puis remplacer  $h$  par 0. Cette plaquette installe ce calcul et son sens concret : vitesse moyenne contre vitesse instantanée, coût moyen contre coût marginal.

#### Exercice 1 - Un premier taux de variation

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

- Calculer  $f(1)$  et  $f(3)$ .
- Calculer le taux de variation de  $f$  entre 1 et 3.
- Interpréter graphiquement le résultat.

#### Exercice 2 - Resserrer l'intervalle

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ . On calcule le taux de variation de  $f$  entre 1 et  $b$ , pour des valeurs de  $b$  de plus en plus proches de 1.

- Recopier et compléter le tableau.

| $b$                 | 2 | 1,5 | 1,1 | 1,01 |
|---------------------|---|-----|-----|------|
| taux entre 1 et $b$ | ? | ?   | ?   | ?    |

- Quelle valeur semblent approcher ces taux ?
- Comment appelle-t-on cette valeur limite ?

#### Exercice 3 - Le calcul avec le pas $h$

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  et  $h$  un réel non nul.

- Développer  $f(1 + h)$ .
- Montrer que le taux d'accroissement de  $f$  en 1 vaut  $2 + h$ .
- En déduire  $f'(1)$ .

#### Exercice 4 - Un nombre dérivé sur un trinôme

Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2 + 3x$ .

- Calculer  $g(2)$ , puis développer  $g(2 + h)$ .

- b) Déterminer le taux d'accroissement de  $g$  en 2, simplifié.
- c) En déduire  $g'(2)$ .

**Exercice 5 - Le cas d'une fonction affine**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x - 5$  et  $a$  un réel quelconque.

- a) Calculer le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$ .
- b) En déduire  $f(a)$  pour tout réel  $a$ .
- c) Interpréter le résultat graphiquement.

**Exercice 6 - Le nombre dérivé de la fonction cube**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .

On donne, pour tout réel  $h$ ,  $(1 + h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$ .

- a) Déterminer le taux d'accroissement de  $f$  en 1, simplifié.
- b) En déduire  $f'(1)$ .
- c) Reprendre la question avec le point d'abscisse 2, sachant que  $(2 + h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$ .

**Exercice 7 - Le nombre dérivé de la fonction inverse**

Soit  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

- a) Montrer que, pour  $h \neq 0$  et  $h > -2$ , le taux d'accroissement de  $f$  en 2 vaut  $\frac{-1}{2(2+h)}$ .
- b) En déduire  $f'(2)$ .
- c) Quel est le signe de  $f'(2)$  ? Qu'en déduit-on pour la courbe ?

**Exercice 8 - Vitesse moyenne et vitesse instantanée**

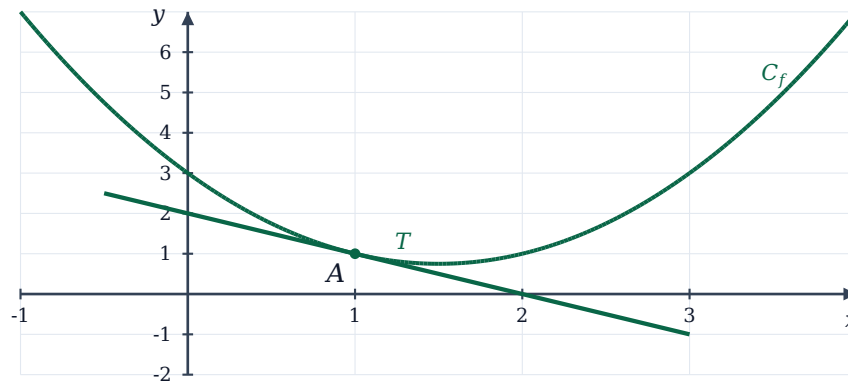
Un objet tombe en chute libre. La distance parcourue, en mètres, au bout de  $t$  secondes est  $d(t) = 5t^2$ .

- a) Calculer la vitesse moyenne de l'objet entre  $t = 2$  s et  $t = 4$  s.
- b) Déterminer le taux d'accroissement de  $d$  en 2, puis  $d'(2)$ .
- c) Interpréter  $d'(2)$  et expliquer pourquoi les deux résultats sont différents.

**Exercice 9 - Lire un nombre dérivé sur un graphique**

Sur le graphique ci-dessous, la courbe d'une fonction  $f$  est tracée ainsi que sa tangente au point  $A$  d'abscisse 1.

- Lire  $f(1)$ .
- Déterminer graphiquement le coefficient directeur de la tangente, et en déduire  $f'(1)$ .
- La fonction monte-t-elle ou descend-elle au point  $A$  ?

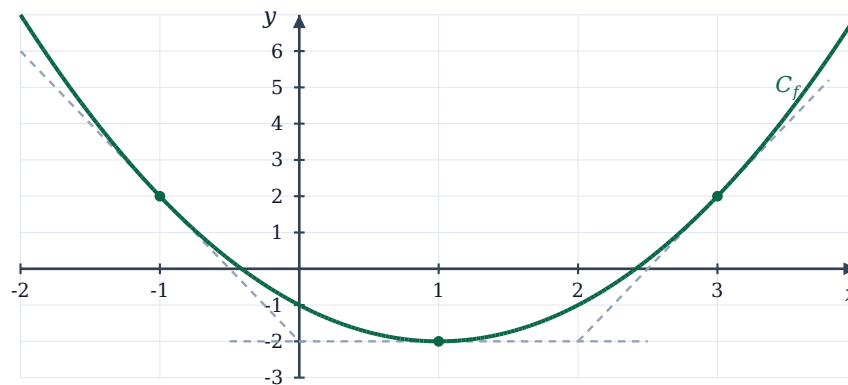


La courbe de  $f$  et sa tangente  $T$  au point  $A$  d'abscisse 1.

**Exercice 10 - Le signe du nombre dérivé selon le point**

Le graphique ci-dessous représente une fonction  $f$  et trois de ses tangentes, aux points d'abscisses  $-1$ ,  $1$  et  $3$ .

- Pour chacun de ces trois points, donner le signe de  $f'$  et justifier.
- L'un des trois nombres dérivés est nul : lequel, et que vaut-il exactement ?
- Ranger  $f'(-1)$ ,  $f'(1)$  et  $f'(3)$  dans l'ordre croissant.



La courbe de  $f$  et ses tangentes en  $-1$ ,  $1$  et  $3$ .

**Exercice 11 - Coût moyen et coût marginal**

Le coût de production, en euros, de  $q$  objets est  $C(q) = q^2 + 10q + 50$ .

- Calculer le taux de variation de  $C$  entre  $q = 10$  et  $q = 12$ , et l'interpréter.
- Déterminer  $C'(10)$ .

c) Comparer  $C'(10)$  au coût réel du onzième objet,  $C(11) - C(10)$ .

### Exercice 12 - Taux de variation sur un relevé

La température d'un four, en degrés Celsius, est relevée toutes les deux minutes après l'allumage.

| Temps (min)      | 0  | 2  | 4   | 6   | 8   |
|------------------|----|----|-----|-----|-----|
| Température (°C) | 20 | 80 | 130 | 170 | 200 |

- Calculer le taux de variation de la température entre 0 et 2 minutes, puis entre 6 et 8 minutes. Préciser l'unité.
- Sur quel intervalle le four chauffe-t-il le plus vite ?
- Peut-on calculer le taux de variation entre 2 et 3 minutes avec ce tableau ?

### Exercice 13 - Un nombre dérivé nul

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 4x$ .

- Calculer  $f(2)$ , puis développer  $f(2 + h)$ .
- Montrer que le taux d'accroissement de  $f$  en 2 vaut  $h$ .
- En déduire  $f'(2)$  et interpréter graphiquement.

### Exercice 14 - Approcher une valeur avec le nombre dérivé

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ . On admet que  $f'(1) = 2$ .

- Donner une valeur approchée de  $f(1,02)$  à l'aide de l'approximation affine.
- Calculer la valeur exacte de  $f(1,02)$  et comparer.
- Reprendre la question a) avec  $f(1,5)$  et commenter.

### Exercice 15 - Synthèse : trois nombres dérivés sur la même fonction

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - x + 2$ .

- Calculer le taux de variation de  $f$  entre  $-1$  et  $2$ . Interpréter le résultat obtenu.
- Déterminer  $f'(1)$  en passant par le taux d'accroissement.
- Déterminer de même  $f'(0)$ .
- Comparer les signes de  $f'(0)$  et  $f'(1)$  et en déduire une information sur les variations de  $f$ .