

Plaquette 5 - Synthèse : étudier une fonction

Dérivation — Première générale

Exercices

Méthode

Dernière plaquette : l'**étude complète** d'une fonction, telle qu'elle est demandée au bac. Le plan ne change jamais — dériver, factoriser f , dresser le tableau de variations, calculer les valeurs remarquables, écrire les tangentes utiles, puis répondre à la question posée. La seconde moitié est consacrée aux problèmes d'**optimisation** dans des contextes variés : volume d'une boîte, surface d'un emballage, aire d'un rectangle inscrit, bénéfice, vitesse. Dans tous les cas, la même discipline : on nomme l'inconnue, on précise son **domaine**, on exprime la grandeur à optimiser, on dérive, et on conclut par une phrase en français avec les unités. Un optimum trouvé hors du domaine n'est pas une réponse.

Exercice 1 - Étude complète d'un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
- Donner l'extremum de f .
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
- En quel point la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $y = 4x - 1$?

Exercice 2 - Étude complète d'une fonction du troisième degré

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Donner les extremums locaux.
- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 3 - Un coefficient dominant négatif

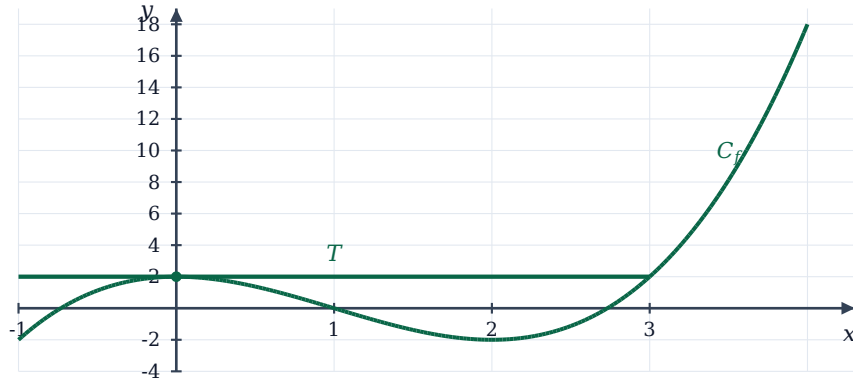
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 2$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Donner les extremums locaux et préciser leur nature.
- Déterminer les abscisses des points où la tangente est horizontale, et les équations de ces tangentes.

Exercice 4 - Tout lire sur une courbe

La courbe ci-dessous représente une fonction f dérivable sur $[-1; 4]$, et sa tangente au point d'abscisse 0.

- Donner $f(0)$ et $f'(0)$.
- Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de f .
- Dresser le tableau de signes de f' sur $[-1; 4]$.
- Donner le maximum et le minimum de f sur $[-1; 4]$.



La courbe de f sur $[-1; 4]$ et sa tangente en 0.

Exercice 5 - Retrouver la bonne expression

Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée une fonction dont le tableau de signes est le suivant.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	

Parmi les trois expressions suivantes, déterminer laquelle peut être celle de f , en justifiant.

- $f_1(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$
- $f_2(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
- $f_3(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$

Exercice 6 - La concentration d'un médicament

Après une injection, la concentration d'un principe actif dans le sang, en mg/L, est modélisée par

$$C(t) = -t^3 + 6t^2 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 6$$

où t est le temps en heures.

- Calculer $C'(t)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de variations de C sur $[0; 6]$.
- Déterminer l'instant où la concentration est maximale, et cette concentration.
- Que vaut la concentration au bout de 6 heures ? Interpréter.

Exercice 7 - Position d'une courbe et de sa tangente

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

- Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.
- Vérifier que $f(x) - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$ pour tout réel x .
- En déduire la position de la courbe par rapport à T .

Exercice 8 - Recette, coût et bénéfice cubique

Un atelier vend chaque tonne 27 €. Le coût de production de q tonnes, en euros, est $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 8$, pour $0 \leq q \leq 6$.

- Exprimer le bénéfice $B(q)$ et montrer que $B(q) = -q^3 + 6q^2 + 12q - 8$.
- Calculer $B'(q)$ et le factoriser, sachant que $-3q^2 + 12q + 12$ a pour racines $2 - 2\sqrt{2}$ et $2 + 2\sqrt{2}$.
- Déterminer la production qui maximise le bénéfice, à 0,01 tonne près, et le bénéfice correspondant, arrondi à l'euro.

Exercice 9 - Un minimum avec un terme en 1 sur x

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

- Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous la forme $\frac{2x^3 - 2}{x^2}$.
- Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.

Exercice 10 - Distance, vitesse et arrêts

Un mobile se déplace sur un axe. Sa position, en mètres, à l'instant t (en secondes) est $d(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, pour $0 \leq t \leq 5$. Sa vitesse est $v(t) = d'(t)$.

- Déterminer $v(t)$ et le factoriser.
- À quels instants la vitesse est-elle nulle ?
- Dresser le tableau de variations de d sur $[0; 5]$ et décrire le mouvement en une phrase.

Exercice 11 - Le rectangle inscrit sous une parabole

Dans un repère, on considère la parabole d'équation $y = 9 - x^2$. Un rectangle a deux sommets sur l'axe des abscisses, aux points d'abscisses $-x$ et x (avec $0 < x < 3$), et les deux autres sur la parabole.

- Exprimer la largeur et la hauteur du rectangle en fonction de x , puis son aire $A(x)$.
- Calculer $A'(x)$ et déterminer son signe sur $]0; 3[$.
- Déterminer la valeur de x qui rend l'aire maximale, et cette aire (valeur exacte puis arrondie au centième).

Exercice 12 - Tangentes parallèles à une droite

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$ et d la droite d'équation $y = 9x + 1$.

- Déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe de f est parallèle à d .
- Déterminer les équations de ces deux tangentes.
- Ces tangentes sont-elles confondues avec d ?

Exercice 13 - L'emballage le plus économique

Une boîte à base carrée, sans couvercle, doit contenir 500 cm^3 . On note x le côté de la base et h la hauteur, en centimètres.

- Exprimer h en fonction de x , puis montrer que l'aire de carton utilisée est $S(x) = x^2 + \frac{2\,000}{x}$.
- Calculer $S'(x)$ et déterminer son signe sur $]0; +\infty[$.
- Déterminer les dimensions qui minimisent l'aire de carton, et cette aire.

Exercice 14 - Compléter un tableau de variations

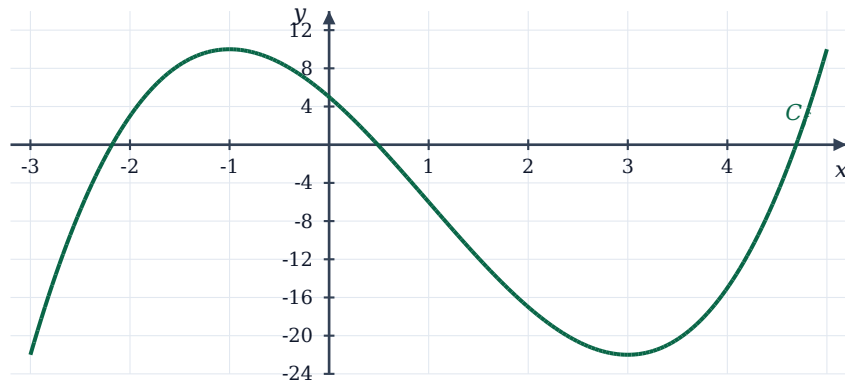
Soit f définie sur $[-2; 4]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Déterminer les racines de f' appartenant à $[-2; 4]$.
- Compléter le tableau de variations de f sur $[-2; 4]$, avec toutes les valeurs.
- Donner le maximum et le minimum de f sur cet intervalle.

Exercice 15 - Synthèse : étude et tracé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, dont la courbe est tracée ci-dessous.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et donner les extremums locaux.
- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
- Déterminer les abscisses des points où la tangente est horizontale, et vérifier la cohérence avec le graphique.
- L'équation $f(x) = 15$ a-t-elle des solutions dans $[-1 ; 3]$? Justifier avec le tableau de variations.



La courbe de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.