

Plaquette 2 - Tangentes à une courbe

Dérivation — Première générale

Exercices

Méthode

La tangente en un point est la droite qui « épouse » la courbe à cet endroit. Son équation ne demande que **deux nombres** : $f(a)$, l'ordonnée du point de contact, et $f'(a)$, la pente. D'où la formule unique de la plaquette, $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, qu'il faut savoir appliquer dans les deux sens : calculer une équation à partir de a , mais aussi retrouver $f(a)$ et $f'(a)$ en lisant une tangente tracée. Trois questions types reviennent : tangente **horizontale** ($f'(a) = 0$), tangente **de pente donnée** (on résout $f'(a) = m$), tangente **parallèle à une droite** (même chose, m étant le coefficient de la droite). L'erreur systématique à éviter : confondre $f(a)$ et $f'(a)$, ou oublier le $-a$ dans la parenthèse.

Exercice 1 - Une première équation de tangente

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, dont la dérivée est $f'(x) = 2x$.

- Calculer $f(3)$ et $f'(3)$.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.
- Vérifier que le point de contact appartient bien à cette tangente.

Exercice 2 - Tangente à un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. On admet que $f'(x) = 2x - 3$.

- Calculer $f(2)$ et $f'(2)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente T au point d'abscisse 2.
- Le point $B(5; 2)$ appartient-il à T ?

Exercice 3 - Tangente à la fonction cube

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$, dont la dérivée est $f'(x) = 3x^2$.

- Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -1 .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.
- Que remarque-t-on pour la tangente en 0 ?

Exercice 4 - Chercher une tangente horizontale

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 5$. On admet que $f'(x) = 2x - 6$.

- Déterminer l'abscisse du point où la tangente à la courbe est horizontale.
- Donner l'équation de cette tangente.
- Que représente ce point pour la courbe ?

Exercice 5 - Tangente de coefficient directeur imposé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, de dérivée $f'(x) = 2x$.

- Déterminer l'abscisse du point où la tangente a pour coefficient directeur 8.
- Donner l'équation réduite de cette tangente.
- Existe-t-il un point où la tangente a pour coefficient directeur -2 ? Si oui, lequel ?

Exercice 6 - Tangente parallèle à une droite donnée

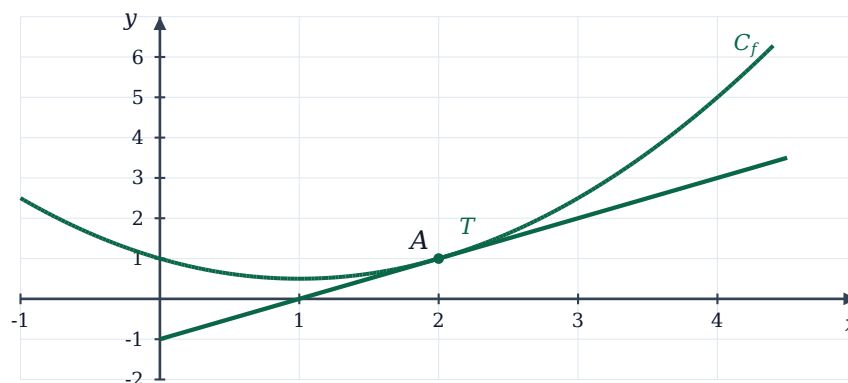
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$, de dérivée $f'(x) = 2x - 4$, et d la droite d'équation $y = 2x + 7$.

- Traduire par une équation la condition « la tangente en a est parallèle à d ».
- Déterminer l'abscisse du point de contact, puis l'équation de cette tangente.
- La tangente trouvée est-elle confondue avec d ? Justifier.

Exercice 7 - Lire $f(a)$ et $f'(a)$ sur une tangente

Sur le graphique ci-dessous, la tangente T à la courbe d'une fonction f au point A d'abscisse 2 est tracée.

- Lire $f(2)$.
- Déterminer le coefficient directeur de T et en déduire $f'(2)$.
- Donner l'équation réduite de T et vérifier la lecture.



La courbe de f et sa tangente T au point A d'abscisse 2.

Exercice 8 - Retrouver $f(a)$ et $f'(a)$ à partir de deux points

La tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse 1 passe par les points $P(0; -1)$ et $Q(2; 3)$.

- Déterminer le coefficient directeur de cette tangente, puis $f'(1)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente, puis $f(1)$.
- La courbe de f passe-t-elle par le point Q ? Peut-on l'affirmer ?

Exercice 9 - Tangente à la fonction inverse

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- Calculer $f(2)$ et $f'(2)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 2.
- Cette tangente coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, en quel point ?

Exercice 10 - La courbe est-elle au-dessus de sa tangente ?

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, de dérivée $f'(x) = 2x$, et T la tangente au point d'abscisse 1.

- Déterminer l'équation réduite de T .
- Étudier le signe de $f(x) - (2x - 1)$ pour tout réel x .
- En déduire la position de la courbe par rapport à T .

Exercice 11 - Deux tangentes horizontales

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$. On admet que $f'(x) = 3x^2 - 3$.

- Résoudre $f'(x) = 0$.
- En déduire les équations des tangentes horizontales à la courbe de f .
- Ces deux tangentes sont-elles confondues ?

Exercice 12 - Tracer une tangente

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^2$, de dérivée $f'(x) = x$.

- Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 au point d'abscisse -2 , puis celle de la tangente T_2 au point d'abscisse 2.
- Tracer la courbe de f et les deux tangentes dans un même repère.
- En quel point les deux tangentes se coupent-elles ?

Exercice 13 - Le niveau d'un réservoir

La hauteur d'eau dans un réservoir qui se vide, en centimètres, est donnée par $h(t) = 0,05t^2 - 4t + 80$, où t est le temps en minutes, pour $0 \leq t \leq 40$. On admet que $h'(t) = 0,1t - 4$.

- Calculer $h(10)$ et $h'(10)$, puis interpréter chaque résultat avec son unité.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 10.
- À l'aide de cette tangente, estimer la hauteur d'eau à $t = 11$ min, puis comparer à la valeur exacte.

Exercice 14 - Quand la tangente recoupe la courbe

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$, de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 3$.

- Déterminer l'équation réduite de la tangente T au point d'abscisse 1.
- Résoudre l'équation $f(x) = -2$ et en déduire tous les points communs à la courbe et

à T .

c) Que peut-on en conclure sur l'idée qu'une tangente « ne touche la courbe qu'une fois » ?

Exercice 15 - Synthèse : trois tangentes à une même parabole

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. On admet que $f'(x) = 2x - 2$.

- Déterminer les équations réduites des tangentes T_0 , T_1 et T_3 aux points d'abscisses 0, 1 et 3.
- Laquelle est horizontale ? Que représente son point de contact ?
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de T_0 et T_3 .
- Vérifier que l'abscisse de ce point est la moyenne de 0 et 3.