

Plaquette 4 - Variations et extremums

Dérivation — Première générale

Exercices

Méthode

Voici le théorème qui justifie tout le chapitre : **le signe de f' donne les variations de f** . Dériver devient alors un moyen, et non une fin : on calcule f' , on **factorise** pour en connaître le signe, on dresse le tableau de variations, et on lit les extremums. La rédaction est codifiée : une ligne pour le signe de f' , une ligne pour les flèches de f , et les valeurs des extremums calculées avec f' (jamais avec f). Deux pièges reviennent : remplir la ligne des variations avec les valeurs de f' au lieu de celles de f , et croire qu'une dérivée nulle signale toujours un extremum — la fonction cube est là pour rappeler que non. Les cinq derniers exercices sont des problèmes d'**optimisation** : c'est l'usage principal de la dérivation.

Exercice 1 - Variations d'un trinôme par la dérivée

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4$.

- Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Donner l'extremum de f et la valeur en laquelle il est atteint.

Exercice 2 - Un trinôme tourné vers le bas

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 + 8x - 3$.

- Calculer $g'(x)$ et résoudre $g'(x) = 0$.
- Dresser le tableau de variations de g .
- En déduire l'extremum de g et préciser sa nature.

Exercice 3 - Deux extremums pour une fonction du troisième degré

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de signes de f' , puis le tableau de variations de f .
- Donner les extremums locaux de f et préciser leur nature.

Exercice 4 - Une dérivée à racines non entières symétriques

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

- Calculer $f'(x)$, puis le factoriser.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Calculer les valeurs des extremums locaux.

Exercice 5 - Une dérivée qui se factorise par x

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Donner les extremums locaux de f .

Exercice 6 - Quand la dérivée s'annule sans extremum

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

- Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe sur $\mathbb{R}$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- La fonction admet-elle un extremum en 0 ? Justifier.

Exercice 7 - Variations sur un intervalle fermé

Soit f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = x^3 - 12x$.

- Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe sur $[0; 4]$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 4]$, en indiquant les valeurs aux bornes.
- Donner le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.

Exercice 8 - Résoudre une inéquation sur la dérivée

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$.
- En déduire les intervalles sur lesquels f est croissante.

Exercice 9 - Du tableau de variations au signe de la dérivée

Le tableau ci-dessous donne les variations d'une fonction f dérivable sur $[-2; 5]$.

x	-2		1		4		5
variations de f	-3	croissante	6	décroissante	-1	croissante	2

- Donner le signe de $f'(x)$ sur chacun des trois intervalles.
- Donner les valeurs en lesquelles f s'annule.
- Donner le maximum et le minimum de f sur $[-2; 5]$.

Exercice 10 - Un extremum avec la fonction inverse

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- Calculer $f'(x)$, puis l'écrire sous la forme $\frac{x^2 - 1}{x^2}$.
- Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.

Exercice 11 - La boîte de volume maximal

Dans une feuille de carton carrée de 12 cm de côté, on découpe un carré de côté x dans chaque coin, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

- Exprimer les dimensions de la boîte en fonction de x , et donner le domaine de x .
- Montrer que son volume est $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
- Déterminer la valeur de x qui rend le volume maximal, et ce volume.

Exercice 12 - Le bénéfice maximal d'un atelier

Le bénéfice, en milliers d'euros, d'un atelier produisant q tonnes est

$$B(q) = -q^3 + 9q^2 - 15q + 10 \quad \text{pour } 0 \leq q \leq 7$$

- Calculer $B'(q)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de variations de B sur $[0 ; 7]$.
- Déterminer la production qui maximise le bénéfice, et ce bénéfice en euros.

Exercice 13 - Minimiser un coût moyen

Le coût total de production, en euros, de q tonnes est $C(q) = q^2 + 4q + 36$, pour $q > 0$.

Le **coût moyen** par tonne est $M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

- Montrer que $M(q) = q + 4 + \frac{36}{q}$.
- Calculer $M'(q)$ et déterminer son signe.
- Déterminer la production qui minimise le coût moyen, et ce coût.

Exercice 14 - L'enclos au bord d'une rivière

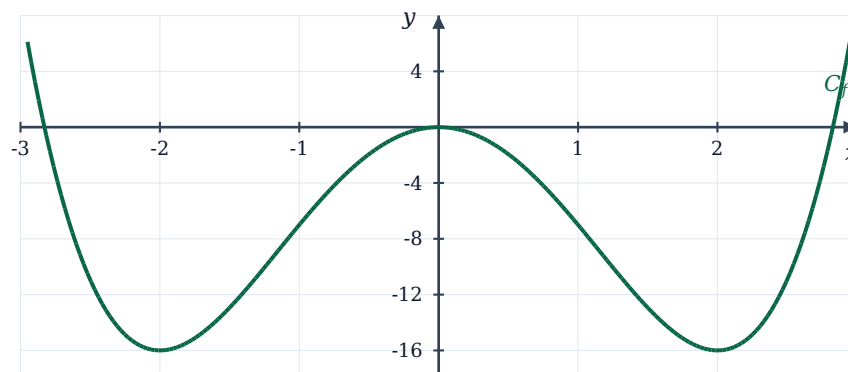
Un éleveur veut clôturer un enclos rectangulaire de 800 m^2 le long d'une rivière rectiligne, qui fait office de quatrième côté : seuls trois côtés sont à clôturer. On note x la longueur, en mètres, du côté parallèle à la rivière.

- Exprimer la profondeur de l'enclos en fonction de x , puis la longueur $L(x)$ de clôture nécessaire.
- Calculer $L'(x)$ et déterminer son signe sur $]0 ; +\infty[$.
- Déterminer les dimensions qui minimisent la longueur de clôture, et cette longueur.

Exercice 15 - Synthèse : une fonction à trois extremums

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 8x^2$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser complètement.
- Dresser le tableau de signes de f' , puis le tableau de variations de f .
- Donner les extremums locaux de f et préciser leur nature.
- La fonction admet-elle un minimum global ? Un maximum global ?



La courbe de $f(x) = x^4 - 8x^2$.