

Plaquette 4 – Évolutions à taux constant

Fonction exponentielle — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Évolutions à taux constant : formules et méthodes.

- **Du taux au coefficient.** Une évolution de t % correspond au coefficient multiplicateur

$$CM = 1 + \frac{t}{100}$$

Réciproquement, $t = (CM - 1) \times 100$. Une hausse donne $CM > 1$, une baisse $0 < CM < 1$.

- **Modèle sur x périodes.** Si le taux est constant :

$$V(x) = V_0 \times q^x \quad \text{avec} \quad q = 1 + \frac{t}{100}$$

- **Taux global** sur n périodes. Le coefficient global est q^n , donc

$$t_{\text{global}} = (q^n - 1) \times 100$$

- **Taux moyen** par période, quand on connaît l'évolution globale de coefficient CM sur n périodes :

$$q_{\text{moyen}} = CM^{\frac{1}{n}} \quad \text{puis} \quad t_{\text{moyen}} = \left(CM^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \times 100$$

C'est le taux **unique** qui, appliqué n fois de suite, donne la même évolution globale.

- **Évolution réciproque.** Pour revenir à la valeur de départ après une évolution de coefficient CM , il faut appliquer le coefficient $\frac{1}{CM}$.
- **Temps de doublement / demi-vie.** On résout $q^x \geq 2$ (ou $q^x \leq 0,5$) par **tableau de valeurs**, en concluant par la monotonie.
- **Les deux pièges.** Les pourcentages ne s'additionnent pas : $+20$ % puis -20 % donne $1,2 \times 0,8 = 0,96$, soit -4 %. Et le taux moyen n'est pas la moyenne arithmétique des taux.

Correction de l'exercice 1 - Du taux au coefficient, et réciproquement

On passe d'une ligne à l'autre avec la formule du cours, dans un sens ou dans l'autre :

$$CM = 1 + \frac{t}{100} \quad \text{et} \quad t = (CM - 1) \times 100$$

- $+5$ % : $CM = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$;
- -12 % : $CM = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$;
- $CM = 1,035$: $t = (1,035 - 1) \times 100 = 3,5$, soit une hausse de $3,5$ % ;
- $CM = 0,96$: $t = (0,96 - 1) \times 100 = -4$, soit une baisse de 4 %.

Évolution	+5 %	-12 %	+3,5 %	-4 %
Coefficient multiplicateur	1,05	0,88	1,035	0,96

Le contrôle de cohérence. Un coefficient supérieur à 1 correspond toujours à une hausse, un coefficient entre 0 et 1 à une baisse. Un coefficient **négalif** ou nul est impossible : une grandeur multipliée par un coefficient reste du même signe.

Réponse. 1,05 ; 0,88 ; +3,5 % ; -4 %.

Correction de l'exercice 2 - Taux global d'une hausse répétée

a) Une hausse de 3 % correspond au coefficient annuel $q = 1,03$. Sur 5 ans, on multiplie cinq fois de suite par 1,03, donc le coefficient global est

$$q^5 = 1,03^5 = 1,159\,274\dots$$

b) On revient au pourcentage avec la formule du cours :

$$t_{\text{global}} = (q^5 - 1) \times 100 = (1,159\,274 - 1) \times 100 = 15,93 \%$$

La hausse totale est donc d'environ +15,93 %.

c) L'abonné a **additionné** les taux : $5 \times 3 = 15 \%$. C'est faux, car chaque hausse porte sur un prix déjà augmenté. L'écart n'est ici que de 0,93 point parce que le taux est faible, mais il grandit vite : avec 10 % par an pendant 5 ans, l'addition donnerait 50 % alors que le vrai taux global est $(1,1^5 - 1) \times 100 \approx 61,05 \%$.

La règle à retenir. On multiplie des coefficients, on n'additionne jamais des pourcentages.

Réponse. a) $q = 1,03$ et $q^5 \approx 1,159\,274$ — b) environ +15,93 % — c) additionner les taux est faux, chaque hausse porte sur un prix déjà augmenté.

Correction de l'exercice 3 - Taux global d'une baisse répétée

a) Perdre 8 % revient à multiplier par $q = 1 - \frac{8}{100} = 0,92$. Sur quatre ans, le coefficient global est

$$q^4 = 0,92^4 = 0,716\,393\dots$$

b) On traduit ce coefficient en pourcentage :

$$t_{\text{global}} = (0,716\,393 - 1) \times 100 = -28,36 \%$$

La machine a donc perdu environ 28,36 % de sa valeur, et non $4 \times 8 = 32 \%$. Pour une **baisse**, l'addition des taux surestime la perte, parce que chaque baisse porte sur une valeur déjà diminuée.

c) On applique le coefficient global à la valeur d'achat :

$$V(4) = 18\,000 \times 0,92^4 = 18\,000 \times 0,716\,393 = 12\,895,07 \approx 12\,895 \text{ €}$$

Le contrôle rapide. Une perte de 28,36 % laisse 71,64 % de la valeur, et $0,7164 \times 18\,000 \approx 12\,895 \text{ €}$ ✓

Réponse. a) $0,92^4 \approx 0,716\,393$ — b) environ -28,36 % — c) environ 12 895 €.

Correction de l'exercice 4 - Calculer un taux moyen annuel

a) Le coefficient global est le quotient de la valeur finale par la valeur initiale :

$$CM = \frac{25\,000}{20\,000} = 1,25$$

b) Le taux moyen est celui qui, appliqué 6 fois de suite, donnerait la même évolution globale. On cherche donc q tel que $q^6 = 1,25$, ce qui s'écrit avec un exposant

fractionnaire :

$$q_{\text{moyen}} = CM^{\frac{1}{6}} = 1,25^{\frac{1}{6}} = 1,037\,891\dots$$

D'où le taux moyen :

$$t_{\text{moyen}} = (1,037\,891 - 1) \times 100 \approx 3,79 \%$$

La population a donc augmenté en moyenne de 3,79 % par an.

c) On applique ce taux moyen six fois de suite :

$$20\,000 \times 1,037\,891^6 = 20\,000 \times 1,25 = 25\,000$$

On retrouve exactement la population finale : le taux moyen est bien celui qui reproduit l'évolution globale.

Pourquoi l'exposant $\frac{1}{6}$. Sans le prolongement des puissances aux exposants non entiers, on ne saurait pas écrire ce nombre. C'est l'usage le plus utile de la fonction exponentielle en Première générale.

Réponse. a) $CM = 1,25$ — b) environ +3,79 % par an — c) on retrouve 25 000 habitants.

Correction de l'exercice 5 - Le taux moyen n'est pas la moyenne des taux

a) On multiplie les deux coefficients, dans l'ordre ou dans l'autre — le résultat est le même :

$$CM = 1,20 \times 0,90 = 1,08$$

Le taux global vaut donc $(1,08 - 1) \times 100 = 8 \%$: le chiffre d'affaires a augmenté de 8 % en deux ans.

b) Le taux moyen annuel correspond au coefficient q tel que $q^2 = 1,08$, c'est-à-dire

$$q_{\text{moyen}} = 1,08^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1,08} = 1,039\,23\dots$$

soit $t_{\text{moyen}} \approx 3,92 \%$ par an.

c) La moyenne arithmétique des taux vaut $\frac{20 - 10}{2} = 5 \%$, ce qui est **différent** des 3,92 % trouvés. Et c'est bien 3,92 % qui est correct : en appliquant 5 % deux fois, on obtiendrait $1,05^2 = 1,1025$, soit +10,25 % au lieu de +8 %.

La raison. Un taux moyen se calcule sur des coefficients qui se **multiplient** ; la moyenne arithmétique, elle, suppose des quantités qui s'ajoutent. C'est pourquoi la formule utilise une puissance $\frac{1}{n}$ et non une division par n .

Réponse. a) $CM = 1,08$, soit +8 % — b) environ +3,92 % par an — c) la moyenne arithmétique (5 %) est fautive : les coefficients se multiplient.

Correction de l'exercice 6 - Temps de doublement d'un capital

a) Le capital est multiplié par $1,05^x$ au bout de x années. Doubler signifie que ce coefficient atteint 2 :

$$C_0 \times 1,05^x \geq 2 \times C_0 \Leftrightarrow 1,05^x \geq 2$$

b) À la calculatrice :

x	13	14	15
$1,05^x$	1,8856	1,9799	2,0789

On lit $1,05^{14} \approx 1,9799 < 2$ et $1,05^{15} \approx 2,0789 \geq 2$. La base 1,05 étant supérieure à 1, la

fonction est croissante : le capital a donc doublé au bout de **15 ans**, et le reste ensuite.

c) Non, le résultat est **indépendant du montant initial**. On l'a vu dès la question a) : le capital C_0 se simplifie des deux côtés de l'inéquation. Un placement de 1 000 € et un placement de 100 000 € au même taux doublent tous les deux en 15 ans.

Le repère à connaître. À 5 % par an, on double en une quinzaine d'années ; à 7 %, en une dizaine. Multiplier le taux par deux divise à peu près le temps de doublement par deux, mais ce n'est qu'un ordre de grandeur.

Réponse. a) $1,05^x \geq 2$ — b) 1,8856 ; 1,9799 ; 2,0789, donc 15 ans — c) non, le montant initial se simplifie.

Correction de l'exercice 7 - Demi-vie d'un principe actif

a) Perdre 12 % revient à conserver 88 % :

$$q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$$

b) On cherche le plus petit entier x tel que la concentration soit tombée à la moitié, c'est-à-dire

$$0,88^x \leq 0,5$$

Le tableau donne $0,88^5 \approx 0,5277 > 0,5$ et $0,88^6 \approx 0,4644 \leq 0,5$. La fonction étant décroissante (base inférieure à 1), le seuil est atteint au bout de **6 heures**.

c) Non. Au bout de 12 heures, le coefficient vaut

$$0,88^{12} = (0,88^6)^2 \approx 0,4644^2 \approx 0,2157$$

Il reste donc environ 21,6 % de la concentration initiale, soit à peu près le **quart** — et non zéro. Deux demi-vies ne suppriment pas la substance : elles la divisent par environ 4.

Ce que la question c) illustre. Chaque demi-vie divise par 2 ce qui **reste** : après n demi-vies, il subsiste $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ de la quantité initiale, jamais 0.

Réponse. a) $q = 0,88$ — b) au bout de 6 heures — c) non, il reste environ 21,6 % de la concentration initiale.

Correction de l'exercice 8 - Revenir au prix de départ

a) La baisse de 30 % correspond au coefficient $CM = 0,70$. Pour revenir au prix de départ, il faut appliquer le coefficient **réciroque** :

$$\frac{1}{CM} = \frac{1}{0,70} = 1,428\,571\dots$$

Le taux correspondant est donc

$$t = (1,428\,571 - 1) \times 100 \approx 42,86 \%$$

b) Avec un prix initial de 80 € : après la baisse, $80 \times 0,70 = 56$ € ; après la hausse, $56 \times 1,428\,571 = 80$ € ✓ On retrouve bien le prix de départ.

c) Parce que les deux pourcentages ne portent pas sur la même référence. La baisse de 30 % s'applique au prix **initial** (80 €, soit -24 €), tandis que la hausse doit s'appliquer au prix **soldé**, plus petit (56 €). Pour retrouver 24 € à partir de 56 €, il faut un pourcentage plus grand : $\frac{24}{56} \approx 42,86 \%$.

Le contre-exemple à retenir. -30 % puis +30 % ne ramène pas au départ : $0,7 \times 1,3 = 0,91$, soit une perte finale de 9 %.

Réponse. a) environ +42,86 % — b) $80 \rightarrow 56 \rightarrow 80$ € — c) la hausse porte sur un prix plus petit que celui de la baisse.

Correction de l'exercice 9 – Comparer deux placements

a) Le placement A multiplie chaque année par 1,04, donc sur 10 ans :

$$q^{10} = 1,04^{10} = 1,480\,244\dots$$

soit un taux global d'environ +48,02 %.

b) Le placement B correspond au coefficient global 1,48. On compare les deux coefficients :

$$1,480\,244 > 1,480\,000$$

Le placement **A** est donc (très légèrement) le plus avantageux : +48,02 % contre +48 %.

c) Avec 6 000 € de capital :

— placement A : $6\,000 \times 1,480\,244 = 8\,881,47$ € ;

— placement B : $6\,000 \times 1,48 = 8\,880$ € ;

— écart : $8\,881,47 - 8\,880 = 1,47$ €.

L'écart est minuscule : les deux offres sont pratiquement équivalentes, ce qui n'était pas visible avant le calcul.

Ce que l'exercice apprend. Un taux annuel et un taux global ne se comparent jamais directement : il faut ramener les deux au **même horizon** de temps, ici les 10 ans.

Réponse. a) $1,04^{10} \approx 1,480\,244$ — b) le placement A, de très peu — c) un écart de 1,47 € en faveur de A.

Correction de l'exercice 10 – D'un taux mensuel à un taux annuel

a) Le coefficient mensuel est $q = 1 + \frac{0,5}{100} = 1,005$. Une année compte 12 mois, donc on applique 12 fois ce coefficient :

$$q^{12} = 1,005^{12} = 1,061\,678\dots$$

b) On traduit ce coefficient annuel en pourcentage :

$$t_{\text{annuel}} = (1,061\,678 - 1) \times 100 \approx 6,17 \%$$

c) Parce que la hausse du deuxième mois porte sur un nombre d'abonnés **déjà augmenté** : les 0,5 % ne s'appliquent pas toujours au même effectif. L'addition $12 \times 0,5 = 6$ % oublie cet effet cumulatif ; elle donne toujours un résultat **inférieur** au vrai taux dans le cas d'une hausse. L'écart, ici de 0,17 point, grandit avec le taux mensuel : à 2 % par mois, on obtient $1,02^{12} \approx 1,2682$, soit +26,82 % et non 24 %.

Le vocabulaire des banques. C'est exactement la différence entre un taux « nominal » (additionné) et un taux « effectif » (calculé avec la puissance). Le second est le seul correct.

Réponse. a) $1,005^{12} \approx 1,061\,678$ — b) environ +6,17 % — c) les hausses successives portent sur un effectif déjà augmenté.

Correction de l'exercice 11 – D'un taux annuel à un taux mensuel

a) Appliquer 12 fois de suite le coefficient mensuel q doit donner la hausse annuelle de 12 %, soit le coefficient 1,12 :

$$q^{12} = 1,12$$

b) On résout avec un exposant fractionnaire, comme pour un taux moyen :

$$q = 1,12^{\frac{1}{12}} = 1,009\,489\dots$$

Le taux mensuel est donc

$$t = (1,009\,489 - 1) \times 100 \approx 0,949 \%$$

c) Non, il est légèrement **inférieur** à 1 %. Si le propriétaire appliquait 1 % par mois, la hausse annuelle serait

$$1,01^{12} \approx 1,126\,8$$

soit +12,68 % au lieu des 12 % voulus. Diviser le taux annuel par 12 conduit donc à **surévaluer** la hausse : c'est encore l'effet cumulatif, dans l'autre sens.

La symétrie avec l'exercice précédent. Passer du mois à l'année élève à la puissance 12 ; passer de l'année au mois élève à la puissance $\frac{1}{12}$. Les deux opérations sont réciproques l'une de l'autre.

Réponse. a) $q^{12} = 1,12$ — b) $q \approx 1,009\,489$, soit environ +0,949 % par mois — c) non : 1 % par mois donnerait +12,68 % sur l'année.

Correction de l'exercice 12 - Lire une croissance sur un diagramme

a) On divise chaque valeur par celle de l'année précédente :

$$\frac{530}{500} = 1,06 \quad ; \quad \frac{562}{530} \approx 1,06 \quad ; \quad \frac{595}{562} \approx 1,06 \quad ; \quad \frac{631}{595} \approx 1,06$$

Le quotient est **constant** et vaut 1,06 : c'est la signature d'une évolution à taux constant, donc d'un modèle exponentiel.

b) Le coefficient 1,06 correspond au taux

$$t = (1,06 - 1) \times 100 = 6 \%$$

En prenant $x = 0$ pour l'année 1, la valeur initiale est $C_0 = 500$ milliers d'euros, d'où

$$C(x) = 500 \times 1,06^x$$

c) L'année 8 correspond à $x = 7$ (sept années écoulées depuis l'année 1) :

$$C(7) = 500 \times 1,06^7 = 500 \times 1,503\,63 \approx 752$$

soit environ 752 000 € de chiffre d'affaires.

Le décalage à surveiller. L'année 8 ne correspond pas à $x = 8$: la première année du relevé est le rang 0. Se tromper d'une unité donnerait 797 000 €, soit 45 000 € d'écart.

Réponse. a) tous les quotients valent 1,06 — b) +6 % par an et $C(x) = 500 \times 1,06^x$ — c) environ 752 000 €.

Correction de l'exercice 13 - Une forêt qui recule

a) Une baisse de 3 % par an correspond au coefficient $q = 1 - \frac{3}{100} = 0,97$, d'où le modèle

$$S(x) = 45\,000 \times 0,97^x$$

b) Pour $x = 10$:

$$S(10) = 45\,000 \times 0,97^{10} = 45\,000 \times 0,737\,42\dots \approx 33\,184 \text{ hectares}$$

La forêt aura perdu près de 12 000 hectares en dix ans.

c) « Inférieure à 80 % de la surface actuelle » signifie

$$45\,000 \times 0,97^x < 0,80 \times 45\,000 \Leftrightarrow 0,97^x < 0,80$$

Le tableau donne $0,97^7 \approx 0,8080 > 0,80$ et $0,97^8 \approx 0,7837 < 0,80$. Par décroissance de la fonction (base inférieure à 1), le seuil est franchi au bout de **8 ans**.

Le réflexe utile. Diviser par la surface initiale fait disparaître les 45 000 : le nombre d'années au bout duquel on perd 20 % ne dépend que du taux annuel, pas de la surface de départ.

Réponse. a) $S(x) = 45\,000 \times 0,97^x$ — b) environ 33 184 hectares — c) au bout de 8 ans.

Correction de l'exercice 14 - Inflation et pouvoir d'achat

a) Le coefficient annuel est 1,02, donc sur dix ans :

$$1,02^{10} = 1,218\,994\dots$$

Le taux global est $(1,218\,994 - 1) \times 100 \approx 21,90\%$: les prix ont augmenté de près de 22 % en dix ans.

b) Le nombre d'articles acheteables est le quotient du salaire par le prix. Le salaire ne change pas et le prix est multiplié par 1,218 994, donc ce nombre est multiplié par le coefficient réciproque :

$$\frac{1}{1,218\,994} = 0,820\,348\dots$$

c) Le coefficient 0,820 348 correspond au taux

$$t = (0,820\,348 - 1) \times 100 \approx -17,97\%$$

Le pouvoir d'achat a donc baissé d'environ 18 %, alors que les prix ont monté de près de 22 %. Les deux nombres sont **différents** : c'est exactement le phénomène de l'évolution réciproque, une hausse de $t\%$ ne se compense pas par une baisse de $t\%$.

L'erreur fréquente. Annoncer « les prix ont monté de 21,90 %, donc j'ai perdu 21,90 % de pouvoir d'achat ». La perte réelle est plus faible, car elle se calcule sur la nouvelle référence de prix.

Réponse. a) $1,02^{10} \approx 1,218\,994$, soit +21,90 % — b) par $\approx 0,820\,348$ — c) environ -17,97 % de pouvoir d'achat.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le parc de vélos d'une ville

a) Une hausse de 7 % par an donne le coefficient $q = 1,07$, d'où

$$N(x) = 3\,200 \times 1,07^x$$

Pour 2024, soit $x = 4$:

$$N(4) = 3\,200 \times 1,07^4 = 3\,200 \times 1,310\,796 = 4\,194,5\dots \approx 4\,195 \text{ vélos}$$

b) Le coefficient global sur 4 ans est $1,07^4 \approx 1,310\,796$, donc

$$t_{\text{global}} = (1,310\,796 - 1) \times 100 \approx 31,08\%$$

et non $4 \times 7 = 28\%$.

c) Atteindre 6 400 vélos, c'est doubler le parc initial, donc résoudre

$$3\,200 \times 1,07^x \geq 6\,400 \Leftrightarrow 1,07^x \geq 2$$

Les valeurs fournies donnent $1,07^{10} \approx 1,9672 < 2$ et $1,07^{11} \approx 2,1049 \geq 2$. Par croissance de la fonction, l'objectif est atteint pour $x = 11$, c'est-à-dire en **2031**.

d) Pour les trottinettes, le coefficient global sur 4 ans est

$$CM = \frac{1\,600}{900} = 1,777\,7...$$

Le taux annuel moyen se calcule avec l'exposant $\frac{1}{4}$:

$$q_{\text{moyen}} = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,154\,700...$$

soit environ +15,47 % par an. C'est plus du double du taux des vélos (7 %) : la flotte de **trottinettes** croît nettement plus vite, même si elle reste moins nombreuse en valeur absolue.

Les deux outils de la plaquette réunis. La question c) utilise un tableau de valeurs pour un seuil, la question d) un exposant fractionnaire pour un taux moyen. Ce sont les deux techniques à maîtriser sur les évolutions à taux constant.

Réponse. a) $N(x) = 3\,200 \times 1,07^x$ et $N(4) \approx 4\,195$ vélos — b) environ +31,08 % — c) en 2031 ($x = 11$) — d) environ +15,47 % par an : les trottinettes croissent plus vite.