

Plaquette 1 – Définition et premiers calculs

Fonction exponentielle — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition et règles de calcul pour la fonction exponentielle de base q .

- **Définition.** Pour un réel $q > 0$ et $q \neq 1$, la fonction exponentielle de base q est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = q^x$$

Elle prolonge les puissances entières : pour x entier, q^x garde son sens habituel.

- **Valeurs particulières.** $q^0 = 1$ et $q^1 = q$, quelle que soit la base.
- **Signe.** $q^x > 0$ pour **tout** réel x : une exponentielle ne s'annule jamais et ne devient jamais négative.
- **Exposant négatif et exposant demi-entier :**

$$q^{-a} = \frac{1}{q^a} \quad \text{et} \quad q^{0,5} = q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$$

- **Lecture de la base.** Si $q > 1$, les valeurs augmentent ; si $0 < q < 1$, elles diminuent.
- **Reconnaître une exponentielle dans un tableau.** Les valeurs $f(0), f(1), f(2), \dots$ sont en **quotient constant** égal à q :

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = q$$

Une suite de valeurs à **différence** constante relève au contraire d'une fonction affine.

- **Modèle d'évolution à taux constant.** Une grandeur qui varie de t % par unité de temps s'écrit

$$V(x) = V_0 \times q^x \quad \text{avec} \quad q = 1 + \frac{t}{100}$$

où V_0 est la valeur initiale et q le coefficient multiplicateur par unité de temps.

Correction de l'exercice 1 – Les premières valeurs d'une base supérieure à 1

On applique la définition, en remplaçant x par chaque valeur demandée :

$$f(x) = 1,07^x$$

a) Les deux premières valeurs sont celles du cours, les deux suivantes des produits :

- $f(0) = 1,07^0 = 1$ — l'exposant 0 donne toujours 1 ;
- $f(1) = 1,07^1 = 1,07$;
- $f(2) = 1,07 \times 1,07 = 1,1449$;
- $f(3) = 1,1449 \times 1,07 = 1,225\,043$.

b) L'exposant est négatif, on passe donc par l'inverse :

$$q^{-a} = \frac{1}{q^a} \quad \text{donc} \quad f(-1) = \frac{1}{1,07}$$

À la calculatrice, $\frac{1}{1,07} = 0,934\,57\dots \approx 0,935$.

c) Le nombre 1,07 est le **coefficient multiplicateur** annuel. Comme $1,07 = 1 + \frac{7}{100}$, il correspond à une hausse de **7 % par an** : une grandeur modélisée par f est multipliée par 1,07 chaque année.

À remarquer. $f(-1) < 1$: un exposant négatif correspond à un retour **en arrière** dans le temps, donc à une valeur plus petite qu'au départ.

Réponse. a) $f(0) = 1$, $f(1) = 1,07$, $f(2) = 1,1449$, $f(3) = 1,225\,043$ — b) $f(-1) \approx 0,935$ — c) une augmentation de 7 % par an.

Correction de l'exercice 2 - Une base inférieure à 1

La base vaut 0,8, elle est comprise entre 0 et 1 : c'est le cas de la décroissance.

$$g(x) = 0,8^x$$

a) On calcule de proche en proche en multipliant par 0,8 :

- $g(0) = 1$;
- $g(1) = 0,8$;
- $g(2) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$;
- $g(3) = 0,64 \times 0,8 = 0,512$.

b) L'exposant -2 demande l'inverse de $g(2)$:

$$g(-2) = 0,8^{-2} = \frac{1}{0,8^2} = \frac{1}{0,64} = \frac{100}{64} = \frac{25}{16} = 1,5625$$

c) Les valeurs **diminuent** : 1 puis 0,8 puis 0,64... On multiplie à chaque étape par 0,8, et $0,8 = 1 - \frac{20}{100}$, donc la base traduit une **baisse de 20 %** par unité.

Le piège classique. Une baisse de 20 % ne se code pas avec l'exposant négatif mais avec une base plus petite que 1 : $0,8^x$, et non $1,2^{-x}$ (qui, lui, décroît aussi mais pas au même rythme : $1,2^{-1} \approx 0,833$).

Réponse. a) 1 ; 0,8 ; 0,64 ; 0,512 — b) $g(-2) = \frac{25}{16} = 1,5625$ — c) les valeurs diminuent, la base correspond à -20 % par unité.

Correction de l'exercice 3 - Exposants demi-entiers et racines carrées

Tout repose sur la règle du cours qui relie l'exposant $\frac{1}{2}$ à la racine carrée :

$$q^{0,5} = q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$$

a) $4^{0,5} = \sqrt{4} = 2$ et $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

b) On coupe l'exposant en deux morceaux connus, $1,5 = 1 + 0,5$, et on utilise $q^{a+b} = q^a \times q^b$:

$$16^{1,5} = 16^1 \times 16^{0,5} = 16 \times \sqrt{16} = 16 \times 4 = 64$$

c) L'exposant est négatif **et** demi-entier : on traite les deux, dans l'ordre que l'on veut.

$$25^{-0,5} = \frac{1}{25^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

d) Le produit de deux puissances de même base s'obtient en ajoutant les exposants : $100^{0,5} \times 100^{0,5} = 100^{0,5+0,5} = 100^1 = 100$. C'est cohérent avec $\sqrt{100} \times \sqrt{100} = 10 \times 10 = 100$.

Ce que dit la question d). Elle explique *pourquoi* l'exposant $\frac{1}{2}$ doit valoir la racine

carrée : c'est le seul choix pour lequel la règle $q^{a+b} = q^a q^b$ reste vraie.

Réponse. a) 2 et 3 — b) 64 — c) 0,2 — d) 100.

Correction de l'exercice 4 - Retrouver la base

a) Une exponentielle de base q s'écrit $h(x) = q^x$. En prenant $x = 2$, l'énoncé donne :

$$q^2 = 2,25$$

Comme q est **strictement positif**, cette équation a une seule solution acceptable :

$$q = \sqrt{2,25} = 1,5$$

(-1,5 est bien solution de $q^2 = 2,25$, mais une base d'exponentielle est toujours positive : on l'écarte.)

b) La base connue, les valeurs se calculent directement avec $h(x) = 1,5^x$:

$$— h(1) = 1,5 ;$$

$$— h(3) = 1,5^3 = 1,5 \times 1,5 \times 1,5 = 3,375.$$

On peut contrôler : $h(3) = h(2) \times 1,5 = 2,25 \times 1,5 = 3,375$.

c) La base 1,5 est **supérieure à 1**, donc h est **croissante** sur $\mathbb{R}$: chaque unité ajoutée à x multiplie la valeur par 1,5, c'est-à-dire une hausse de 50 %.

Réponse. a) $q^2 = 2,25$ donc $q = 1,5$ — b) $h(1) = 1,5$ et $h(3) = 3,375$ — c) croissante ($q > 1$).

Correction de l'exercice 5 - Vrai ou faux sur la définition

Chaque réponse se lit directement dans la définition : la base est **strictement positive**, l'exponentielle est **strictement positive**, et $q^0 = 1$.

a) **Faux.** Le cours affirme

$$q^x > 0 \quad \text{pour tout réel } x$$

donc $1,05^x$ ne peut jamais valoir -2 . Pour x très négatif, la valeur devient très petite (par exemple $1,05^{-100} \approx 0,0076$), mais elle reste positive.

b) **Faux.** C'est $q^0 = 1$, et non 0. La confusion avec $0 \times q$ est fréquente : ici 0 est un **exposant**, pas un facteur.

c) **Faux.** Une base d'exponentielle doit vérifier $q > 0$. Avec $q = -2$, l'écriture $(-2)^{0,5} = \sqrt{-2}$ n'a aucun sens : on ne pourrait pas définir la fonction sur $\mathbb{R}$.

d) **Vrai.** Si $q > 1$, alors $q^x > 1$ pour $x > 0$ et $q^x < 1$ pour $x < 0$; si $0 < q < 1$, c'est l'inverse. Dans les deux cas la valeur 1 n'est atteinte qu'en $x = 0$. Obtenir $q^x = 1$ avec $x \neq 0$ impose donc $q = 1$ — la base exclue par la définition, car 1^x est la fonction constante égale à 1.

Réponse. a) faux — b) faux ($q^0 = 1$) — c) faux (la base doit être positive) — d) vrai.

Correction de l'exercice 6 - Compléter un tableau de valeurs

On part de la colonne $x = 0$, la plus simple, puis on avance vers la droite en multipliant par la base et vers la gauche en divisant par elle :

$$f(x+1) = 3 \times f(x)$$

Vers la droite : $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 9$, $f(3) = 27$.

Vers la gauche, on utilise la règle de l'exposant négatif :

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Le tableau complété est donc le suivant.

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Le contrôle utile. Le quotient de deux valeurs voisines vaut toujours 3 : $\frac{1/3}{1/9} = 3$, $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{27}{9} = 3$. Si un des quotients ne vaut pas 3, c'est qu'une case est fausse.

Réponse. $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1 ; 3 ; 9 ; 27.

Correction de l'exercice 7 - Supprimer les exposants négatifs

La règle unique de cet exercice est celle de l'exposant négatif :

$$q^{-a} = \frac{1}{q^a}$$

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$.

b) $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,2$.

c) $1,1^{-2} = \frac{1}{1,1^2} = \frac{1}{1,21} = 0,82644... \approx 0,826$.

d) $0,5^{-2} = \frac{1}{0,5^2} = \frac{1}{0,25} = 4$.

Ce que montre la question d). Un exposant négatif ne rend pas le résultat négatif, et il ne le rend pas non plus forcément petit : avec une base inférieure à 1, il **agrandit** le nombre. Le signe de l'exposant indique dans quel sens on parcourt la table des puissances, rien de plus.

Réponse. a) $\frac{1}{8} = 0,125$ — b) 0,2 — c) $\approx 0,826$ — d) 4.

Correction de l'exercice 8 - Deux écritures pour la même fonction

a) Les deux calculs se mènent séparément :

— $u(3) = 0,5^3 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125$;

— $v(3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$.

Les deux valeurs coïncident : ce n'est pas un hasard.

b) On part de la base de u et on l'écrit avec la base 2. Comme $0,5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, la règle du cours sur la puissance d'une puissance donne

$$(q^a)^b = q^{ab}$$

donc

$$u(x) = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-1 \times x} = 2^{-x} = v(x)$$

L'égalité est vraie pour **tout** réel x : u et v sont la même fonction, écrite de deux façons.

c) Le même raisonnement avec $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ donne

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-x}$$

À retenir. Prendre l'inverse de la base revient à changer le signe de l'exposant. C'est pourquoi une décroissance peut s'écrire de deux manières, et pourquoi il faut toujours préciser laquelle on utilise.

Réponse. a) $u(3) = v(3) = 0,125$ — b) $0,5^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$ — c) $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-x}$.

Correction de l'exercice 9 - Exponentielle ou fonction affine ?

a) Pour trancher, on calcule les **différences** et les **quotients** de deux valeurs consécutives.

Pour A : $220 - 200 = 20$ puis $242 - 220 = 22$ — les différences changent. En revanche

$$\frac{220}{200} = 1,1 \quad ; \quad \frac{242}{220} = 1,1 \quad ; \quad \frac{266,2}{242} = 1,1 \quad ; \quad \frac{292,82}{266,2} = 1,1$$

Le quotient est constant : A suit un modèle **exponentiel**.

Pour B : les quotients $\frac{220}{200} = 1,1$ et $\frac{240}{220} \approx 1,09$ ne sont pas égaux, mais les différences valent 20, 20, 20, 20. La grandeur B suit donc un modèle **affine** : $B(x) = 200 + 20x$.

b) La valeur initiale est $V_0 = 200$ et le coefficient multiplicateur annuel est $q = 1,1$:

$$A(x) = 200 \times 1,1^x$$

c) On prolonge chaque modèle d'un an :

— exponentiel : $A(5) = 292,82 \times 1,1 = 322,102$;

— affine : $B(5) = 280 + 20 = 300$.

Ce que cela apprend. Les deux modèles partaient du même point et de la même première hausse ; au bout de cinq ans, l'écart est déjà de plus de 22. Une croissance exponentielle finit toujours par dépasser une croissance affine.

Réponse. a) A est exponentielle, B est affine — b) $A(x) = 200 \times 1,1^x$ — c) $A(5) = 322,102$ et $B(5) = 300$.

Correction de l'exercice 10 - Population d'une commune

a) Une hausse de 1,2 % par an correspond à une multiplication annuelle par le coefficient

$$q = 1 + \frac{1,2}{100} = 1 + \frac{1,2}{100} = 1,012$$

Multiplier x fois de suite par 1,012, c'est multiplier par $1,012^x$, d'où le modèle du cours pour une évolution à taux constant :

$$P(x) = P_0 \times q^x = 42\,000 \times 1,012^x$$

b) 2025 correspond à $x = 5$ et 2030 à $x = 10$:

— $P(5) = 42\,000 \times 1,012^5 = 44\,581,2... \approx 44\,581$ habitants ;

— $P(10) = 42\,000 \times 1,012^{10} = 47\,321,0... \approx 47\,321$ habitants.

c) Non. En 2200, soit $x = 180$, le modèle donnerait $42\,000 \times 1,012^{180} \approx 359\,500$ habitants : un modèle exponentiel suppose un taux **rigoureusement constant** pendant 180 ans, ce qu'aucune commune ne connaît (logement disponible, natalité, migrations). Il sert à **court terme**, sur quelques années.

Le piège de l'arrondi. On arrondit à la fin. Arrondir $1,012^5$ à 1,06 avant de multiplier donnerait 44 520, soit 61 habitants d'écart.

Réponse. a) $q = 1,012$ donc $P(x) = 42\,000 \times 1,012^x$ — b) environ 44 581 puis 47 321 habitants — c) non, le taux ne peut pas rester constant deux siècles.

Correction de l'exercice 11 - Un capital placé à intérêts composés

a) Chaque année, le capital est multiplié par le coefficient $q = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$. Au bout de x années, on a donc multiplié x fois par 1,03 :

$$C(x) = 2\,500 \times 1,03^x$$

b) On remplace x par 8 :

$$C(8) = 2\,500 \times 1,03^8 = 2\,500 \times 1,266\,770\dots$$

soit $C(8) = 3\,166,925\dots \approx 3\,166,93$ €.

c) L'augmentation vaut $3\,166,93 - 2\,500 = 666,93$ €. Rapportée au capital initial, cela fait

$$\frac{666,93}{2\,500} = 0,2667\dots \approx 26,7 \%$$

Ce n'est donc **pas** 24 %, mais un peu plus. La raison : à partir de la deuxième année, les 3 % portent aussi sur les intérêts déjà acquis — ce sont des **intérêts composés**.

Additionner les pourcentages ($8 \times 3 \%$) revient à oublier cet effet, et donne toujours un résultat trop petit dans le cas d'une hausse.

Réponse. a) $C(x) = 2\,500 \times 1,03^x$ — b) $C(8) \approx 3\,166,93$ € — c) $+666,93$ €, soit environ 26,7 % et non 24 %.

Correction de l'exercice 12 - Deux bases en concurrence

a) L'exposant 0 donne toujours 1, quelle que soit la base :

$$f(0) = 1,2^0 = 1 \quad \text{et} \quad g(0) = 1,3^0 = 1$$

Les deux courbes passent donc par le **même point** (0 ; 1).

b) Pour $x = 1$: $f(1) = 1,2$ et $g(1) = 1,3$, donc $f(1) < g(1)$. Pour $x = 5$:

$$— f(5) = 1,2^5 = 2,488\,32 ;$$

$$— g(5) = 1,3^5 = 3,712\,93.$$

On a encore $f(5) < g(5)$.

c) L'affirmation est **fausse**. L'écart vaut 0,1 en $x = 1$, mais :

$$— \text{en } x = 0, \text{ il vaut } 1 - 1 = 0 ;$$

$$— \text{en } x = 5, \text{ il vaut } 3,712\,93 - 2,488\,32 = 1,224\,61.$$

L'écart n'est donc pas constant : il part de 0 et grandit. La différence des bases ne se transmet pas à la différence des valeurs, parce que la base intervient **en facteur répété** et non en terme ajouté. C'est la différence de fond entre un modèle exponentiel et un modèle affine.

Réponse. a) $f(0) = g(0) = 1$ — b) $1,2 < 1,3$ et $2,488\,32 < 3,712\,93$ — c) faux : l'écart vaut 0 en $x = 0$ et 1,224 61 en $x = 5$.

Correction de l'exercice 13 - Élimination d'un médicament

a) Perdre 25 % revient à garder 75 % de la quantité, donc à multiplier par

$$q = 1 - \frac{25}{100} = 0,75$$

La quantité initiale étant $Q_0 = 400$ mg, le modèle d'évolution à taux constant donne

$$Q(x) = 400 \times 0,75^x$$

b) On multiplie par 0,75 à chaque heure :

- $Q(1) = 400 \times 0,75 = 300$ mg ;
- $Q(2) = 300 \times 0,75 = 225$ mg ;
- $Q(3) = 225 \times 0,75 = 168,75$ mg ;
- $Q(4) = 168,75 \times 0,75 = 126,5625$ mg.

c) Non. Le cours affirme que $q^x > 0$ pour tout réel x : la quantité $400 \times 0,75^x$ reste **strictement positive**, aussi grand que soit x . Elle devient aussi petite que l'on veut ($Q(24) \approx 0,4$ mg) mais ne s'annule jamais. En pratique, on considère le médicament éliminé quand la quantité passe sous un seuil de détection.

L'erreur à éviter. Perdre 25 % par heure ne signifie pas « tout perdu en 4 heures » : chaque heure, les 25 % portent sur une quantité **plus petite** que l'heure précédente.

Réponse. a) $q = 0,75$ et $Q(x) = 400 \times 0,75^x$ — b) 300 ; 225 ; 168,75 ; 126,5625 mg — c) non, $Q(x) > 0$ pour tout x .

Correction de l'exercice 14 - Lire la courbe d'une exponentielle

a) Par lecture graphique : le point d'abscisse 0 a pour ordonnée 1, et le point d'abscisse 2 a pour ordonnée 2,25 (un peu plus de deux carreaux).

b) Le calcul confirme la lecture, avec la définition de la fonction :

$$f(x) = 1,5^x$$

- $f(0) = 1,5^0 = 1$ — toute courbe d'exponentielle passe par (0 ; 1) ;
- $f(2) = 1,5 \times 1,5 = 2,25$.

c) On cherche x tel que $f(x) = 4$. Graphiquement, on part de 4 sur l'axe des ordonnées, on rejoint la courbe puis l'axe des abscisses : on lit environ $x \approx 3,4$.

Pour encadrer par deux entiers, on calcule les valeurs voisines :

- $f(3) = 1,5^3 = 3,375$, qui est **inférieur** à 4 ;
- $f(4) = 1,5^4 = 5,0625$, qui est **supérieur** à 4.

Comme f est croissante (base supérieure à 1), on en déduit $3 < x < 4$, ce qui est cohérent avec la lecture.

La rédaction attendue. Une lecture graphique se donne toujours comme une valeur **approchée** ; c'est l'encadrement par deux valeurs calculées qui la rend rigoureuse.

Réponse. a) 1 et 2,25 — b) $f(0) = 1$ et $f(2) = 2,25$ — c) $x \approx 3,4$, avec $3 < x < 4$ car $f(3) = 3,375 < 4 < 5,0625 = f(4)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre questions sur la base 2

a) On applique la définition $f(x) = 2^x$, en reconnaissant les puissances de 2 :

- $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$;
- $f(5) = 2^5 = 32$;
- $f(10) = 2^{10} = 1\,024$.

b) L'exposant 0,5 est un demi, donc la règle du cours donne la racine carrée :

$$f(0,5) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1,414\,21\dots \approx 1,414$$

c) Exposant négatif, donc inverse :

$$f(-4) = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

d) Le premier jour correspond à $x = 0$: la surface au jour numéro n est $S = 2^{n-1}$. Le onzième jour, $n = 11$, donc $S = 2^{10} = 1\,024 \text{ m}^2$.

Pour dépasser $1\,000 \text{ m}^2$, on compare aux valeurs de la question a) : $2^9 = 512 < 1\,000$ et $2^{10} = 1\,024 > 1\,000$. Il faut donc atteindre l'exposant 10, soit le **onzième jour**.

Ce que retient l'élève. Doubler onze fois de suite ne fait pas $11 \times 2 = 22 \text{ m}^2$ mais $1\,024 \text{ m}^2$: c'est toute la différence entre ajouter et multiplier de façon répétée. Attention aussi au décalage de un entre le **numéro du jour** et l'**exposant**.

Réponse. a) 1 ; 2 ; 32 ; 1 024 — b) $\sqrt{2} \approx 1,414$ — c) $\frac{1}{16}$ — d) $1\,024 \text{ m}^2$ le onzième jour, qui est aussi le premier jour où la surface dépasse $1\,000 \text{ m}^2$.