

Plaquette 2 - Propriétés algébriques et équations

Fonction exponentielle — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règles de calcul et résolution des équations exponentielles.

- **Les cinq règles** (valables pour tous réels a, b, x et toute base $q > 0$) :

$$q^{a+b} = q^a \times q^b \quad q^{a-b} = \frac{q^a}{q^b} \quad q^{-a} = \frac{1}{q^a}$$

$$(q^a)^b = q^{ab} \quad (p \times q)^x = p^x \times q^x$$

- **Changer de base.** Une puissance de puissance permet de réécrire la base :

$$8^x = (2^3)^x = 2^{3x}.$$

- **Résoudre une équation.** Pour $q > 0$ et $q \neq 1$:

$$q^u = q^v \Leftrightarrow u = v$$

Méthode : on met les deux membres sous la même base, puis on égale les exposants et on résout l'équation obtenue, qui est du premier degré.

- **Résoudre une inéquation.** Le sens dépend de la base :

$$q > 1: q^u < q^v \Leftrightarrow u < v \quad \text{et} \quad 0 < q < 1: q^u < q^v \Leftrightarrow u > v$$

- **Chercher un seuil sans logarithme.** On dresse un **tableau de valeurs**, on repère les deux valeurs qui encadrent le seuil, puis on conclut grâce au sens de variation (l'exponentielle est monotone : une fois le seuil franchi, il l'est pour toujours).

- **Les deux erreurs à ne pas commettre** : $q^x + q^x = 2 \times q^x = q^{x+1}$ seulement si $q = 2$, et $(q^x)^2 = q^{2x}$ et non q^{x^2} .

Correction de l'exercice 1 - Écrire sous la forme d'une seule puissance

Chaque calcul applique une seule des règles du cours ; l'essentiel est de reconnaître laquelle.

- a) Produit de deux puissances de même base : on **ajoute** les exposants.

$$q^{a+b} = q^a \times q^b \quad \text{donc} \quad 2^5 \times 2^3 = 2^8 = 256$$

- b) Quotient de deux puissances de même base : on **soustrait** les exposants.

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$$

- c) Puissance d'une puissance : on **multiplie** les exposants.

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6 = 15\,625$$

- d) Même règle qu'en a), avec un exposant littéral : $1,1^x \times 1,1^3 = 1,1^{x+3}$. On ne peut pas aller plus loin sans connaître x .

Le réflexe. Ajouter, soustraire, multiplier les exposants : les trois opérations correspondent respectivement au produit, au quotient et à la puissance de puissance. Les

confondre est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Réponse. a) $2^8 = 256$ — b) $3^3 = 27$ — c) $5^6 = 15\,625$ — d) $1,1^{x+3}$.

Correction de l'exercice 2 - Un quotient qui se simplifie complètement

a) On traite d'abord le numérateur avec la règle du produit, puis le quotient obtenu avec la règle de la différence.

Au numérateur :

$$1,04^x \times 1,04^2 = 1,04^{x+2}$$

Puis, pour le quotient :

$$A(x) = \frac{1,04^{x+2}}{1,04^{x-1}} = 1,04^{(x+2)-(x-1)}$$

Il reste à calculer l'exposant, en faisant attention au signe devant la parenthèse :

$$(x+2) - (x-1) = x+2-x+1 = 3$$

Donc $A(x) = 1,04^3$: l'exposant ne contient plus x , la fonction A est bien **constante**.

b) $1,04^3 = 1,04 \times 1,04 \times 1,04 = 1,124\,864$.

L'erreur à éviter. Écrire $(x+2) - (x-1) = x+2-x-1 = 1$ en oubliant de distribuer le signe $-$: on obtiendrait $1,04$ au lieu de $1,124\,864$.

Réponse. a) $A(x) = 1,04^3$, constante — b) $1,124\,864$.

Correction de l'exercice 3 - Changer de base

Tout repose sur la règle de la puissance d'une puissance :

$$(q^a)^b = q^{ab}$$

a) $8 = 2^3$, donc $8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$.

b) $9 = 3^2$, donc $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$.

c) $0,25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$, donc

$$0,25^x = (2^{-2})^x = 2^{-2x}$$

L'exposant négatif traduit la décroissance : la base $0,25$ est inférieure à 1 .

d) On lit la règle dans l'autre sens : $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, donc $q = 8$.

À quoi cela sert. Mettre deux membres d'une équation sous la même base est la seule technique de résolution disponible tant que le logarithme n'est pas introduit : savoir passer de 8^x à 2^{3x} est donc indispensable pour la suite de la plaquette.

Réponse. a) 2^{3x} — b) 3^{2x} — c) 2^{-2x} — d) $2^{3x} = 8^x$, donc $q = 8$.

Correction de l'exercice 4 - Deux bases pour un même exposant

a) La règle du cours porte sur le **produit des bases**, à exposant commun :

$$(p \times q)^x = p^x \times q^x$$

Appliquée à $p = 2$ et $q = 3$, elle donne directement $2^x \times 3^x = (2 \times 3)^x = 6^x$.

b) On part de l'égalité de la question a) et on divise les deux membres par 2^x , qui est non nul puisqu'une exponentielle est strictement positive :

$$\frac{6^x}{2^x} = \frac{2^x \times 3^x}{2^x} = 3^x$$

c) Deux chemins, un seul résultat :

— en calculant chaque puissance : $\frac{6^4}{2^4} = \frac{1296}{16} = 81$;

— en utilisant la question b) : $\frac{6^4}{2^4} = 3^4 = 81$.

Le piège symétrique. La règle vaut pour un produit de bases, pas pour une somme : $2^x + 3^x$ n'est **pas** 5^x . On le vérifie en $x = 2$: $4 + 9 = 13$ alors que $5^2 = 25$.

Réponse. a) $(2 \times 3)^x = 6^x$ — b) $\frac{6^x}{2^x} = 3^x$ — c) 81 dans les deux cas.

Correction de l'exercice 5 - Équations à base déjà commune

Dans les quatre cas, les deux membres sont déjà écrits avec la **même base** : on peut appliquer directement la propriété de résolution du cours.

$$q^u = q^v \Leftrightarrow u = v \quad (q > 0, q \neq 1)$$

a) Les exposants sont égaux : $x = 5$.

b) On égale les exposants : $x + 1 = 4$, donc $x = 3$.

c) De même : $2x = 6$, donc $x = 3$.

d) Il faut d'abord voir que le membre de droite est $0,9 = 0,9^1$. L'équation devient $0,9^{x-3} = 0,9^1$, donc $x - 3 = 1$ et $x = 4$.

Pourquoi la propriété est vraie. Une exponentielle est **strictement monotone** : deux exposants différents donnent deux valeurs différentes. Une valeur ne peut donc être atteinte qu'une seule fois, ce qui garantit l'unicité de la solution. C'est faux pour la base 1, exclue de la définition : $1^3 = 1^7$ sans que $3 = 7$.

Réponse. a) $x = 5$ — b) $x = 3$ — c) $x = 3$ — d) $x = 4$.

Correction de l'exercice 6 - Reconnaître une puissance entière du second membre

La méthode est annoncée dans l'énoncé : on transforme le second membre pour retrouver la base du premier, puis on identifie les exposants.

$$q^u = q^v \Leftrightarrow u = v$$

a) $8 = 2^3$, donc l'équation s'écrit $2^x = 2^3$ et $x = 3$.

b) $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$, donc $x = 4$.

c) Il faut un exposant **négatif** pour obtenir une fraction :

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2} \quad \text{donc} \quad 5^x = 5^{-2} \quad \text{et} \quad x = -2$$

d) Avec la base 10, les puissances se lisent sur l'écriture décimale :

$$0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}, \text{ donc } x = -3.$$

Le contrôle. On remplace la solution dans l'équation de départ : $5^{-2} = \frac{1}{25}$ ✓ et $10^{-3} = 0,001$ ✓. Un exposant négatif est attendu chaque fois que le second membre est

compris entre 0 et 1 avec une base supérieure à 1.

Réponse. a) $x = 3$ — b) $x = 4$ — c) $x = -2$ — d) $x = -3$.

Correction de l'exercice 7 - Quand l'exposant est une expression de x

Chaque équation se ramène à une équation du premier degré **sur les exposants**.

$$q^u = q^v \Leftrightarrow u = v$$

a) Base 2 : $16 = 2^4$, donc $2^{x+1} = 2^4$, puis $x + 1 = 4$ et $x = 3$.

b) Base 3 : $27 = 3^3$, donc $2x = 3$ et $x = 1,5$.

c) Ici les bases diffèrent : 4 à gauche, 8 à droite. On les ramène toutes les deux à la base 2 :

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} \quad \text{et} \quad 8 = 2^3$$

L'équation devient $2^{2x} = 2^3$, d'où $2x = 3$ et $x = 1,5$.

d) Base 10 : $100 = 10^2$, donc $3x - 1 = 2$, puis $3x = 3$ et $x = 1$.

La difficulté de la question c). Tant que les deux membres n'ont pas la même base, on ne peut rien identifier. Choisir la base la plus petite (2 ici, puisque 4 et 8 en sont des puissances) est toujours la bonne stratégie.

Réponse. a) $x = 3$ — b) $x = 1,5$ — c) $x = 1,5$ — d) $x = 1$.

Correction de l'exercice 8 - Un facteur devant la puissance

a) La puissance est multipliée par 5 : on divise d'abord les deux membres par 5.

$$5 \times 2^x = 160 \Leftrightarrow 2^x = \frac{160}{5} = 32$$

Puis $32 = 2^5$, donc $2^x = 2^5$ et $x = 5$.

b) Même démarche, avec le facteur 250 :

$$1,2^x = \frac{432}{250} = 1,728$$

Or $1,2^3 = 1,2 \times 1,2 \times 1,2 = 1,728$. L'équation devient $1,2^x = 1,2^3$, donc $x = 3$.

c) Parce que la propriété $q^u = q^v \Leftrightarrow u = v$ ne s'applique qu'à une **égalité entre deux puissances seules**. Avec un facteur devant, elle est fautive : de $5 \times 2^x = 160$, on ne peut pas conclure « $x = 160$ » ni comparer quoi que ce soit. Le facteur 5 n'est pas une puissance de 2, il ne peut donc pas être absorbé dans l'exposant.

Le contrôle. $5 \times 2^5 = 5 \times 32 = 160 \checkmark$ et $250 \times 1,728 = 432 \checkmark$.

Réponse. a) $x = 5$ — b) $x = 3$ — c) la propriété ne vaut qu'entre deux puissances isolées.

Correction de l'exercice 9 - Une inconnue dans les deux exposants

La base est la même dans chaque membre : la propriété de résolution s'applique sans transformation préalable.

$$q^u = q^v \Leftrightarrow u = v$$

a) On égale les exposants, puis on résout l'équation du premier degré obtenue :

$$- 3x = x + 4 ;$$

$$- 3x - x = 4, \text{ soit } 2x = 4 ;$$

$$- x = 2.$$

Contrôle : $2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$ et $2^{2+4} = 2^6 = 64$ ✓

b) De même :

$$- 2x - 1 = x + 2 ;$$

$$- 2x - x = 2 + 1, \text{ soit } x = 3.$$

Contrôle : $2 \times 3 - 1 = 5$ et $3 + 2 = 5$, les deux exposants valent bien 5 ✓

Ce que l'exercice montre. Résoudre une équation exponentielle, c'est toujours résoudre une équation **ordinaire** sur les exposants. Toute la difficulté est de mettre les deux membres sous la même base ; une fois cela fait, on retrouve le premier degré de Seconde.

Réponse. a) $x = 2$ — b) $x = 3$.

Correction de l'exercice 10 - Inéquations : attention au sens de la base

Tout dépend de la position de la base par rapport à 1 :

$$q > 1: q^u < q^v \Leftrightarrow u < v \quad \text{et} \quad 0 < q < 1: q^u < q^v \Leftrightarrow u > v$$

a) Base $1,5 > 1$, la fonction est croissante : l'inégalité se transmet aux exposants **dans le même sens**, donc $x > 4$. Solutions : $]4; +\infty[$.

b) Base $0,8 < 1$, la fonction est décroissante : l'inégalité **change de sens**, donc $x \leq 3$. Solutions : $] -\infty; 3]$.

c) On écrit $32 = 2^5$. La base 2 est supérieure à 1, donc $2^x < 2^5 \Leftrightarrow x < 5$. Solutions : $] -\infty; 5[$.

d) On écrit $0,25 = 0,5^2$. La base 0,5 est inférieure à 1, donc l'inégalité s'inverse : $0,5^x > 0,5^2 \Leftrightarrow x < 2$. Solutions : $] -\infty; 2[$.

Le contrôle de bon sens. En d), on teste $x = 0$: $0,5^0 = 1 > 0,25$ ✓, et 0 appartient bien à l'intervalle trouvé. Tester une valeur permet de rattraper une inversion de sens oubliée.

Réponse. a) $]4; +\infty[$ — b) $] -\infty; 3]$ — c) $] -\infty; 5[$ — d) $] -\infty; 2[$.

Correction de l'exercice 11 - Simplifier une expression littérale

On avance en deux temps : le numérateur, puis le quotient.

Au numérateur, la règle du produit demande d'**ajouter** les exposants :

$$q^{x+1} \times q^{2-x} = q^{(x+1)+(2-x)} = q^3$$

Le terme en x disparaît : $x + 1 + 2 - x = 3$.

Il reste le quotient, où l'on **soustrait** les exposants :

$$B(x) = \frac{q^3}{q^2} = q^{3-2} = q^1 = q$$

L'expression $B(x)$ ne dépend donc pas de x : elle vaut q pour tout réel x .

Le contrôle numérique. En prenant $q = 2$ et $x = 5$:

$$B(5) = \frac{2^6 \times 2^{-3}}{2^2} = \frac{64 \times 0,125}{4} = \frac{8}{4} = 2 = q$$

On retrouve bien q . Tester une valeur numérique est la meilleure façon de vérifier une simplification littérale.

Réponse. $B(x) = q$ pour tout réel x .

Correction de l'exercice 12 - Démontrer la propriété du coefficient multiplicateur

a) On part du membre de gauche et on applique la règle du produit sur les exposants :

$$f(x+1) = V_0 \times q^{x+1} = V_0 \times q^x \times q^1$$

Or $V_0 \times q^x$ n'est autre que $f(x)$, donc

$$f(x+1) = q \times f(x)$$

b) Même démarche avec $x+2$:

$$f(x+2) = V_0 \times q^{x+2} = V_0 \times q^x \times q^2 = q^2 \times f(x)$$

c) Pour $q = 1,03$, l'égalité $f(x+1) = 1,03 \times f(x)$ signifie que la grandeur modélisée est multipliée par 1,03 à chaque fois que le temps avance d'une unité : elle **augmente de 3 %** par période, et ce taux est le même, quelle que soit la période considérée.

Ce que la démonstration établit. Un modèle exponentiel, c'est exactement un modèle à **taux d'évolution constant**. La propriété a) est la traduction mathématique de cette phrase, et c'est elle qui justifie qu'on utilise q^x pour modéliser un pourcentage d'évolution répété.

Réponse. a) $f(x+1) = V_0 q^x \times q = q f(x)$ — b) $f(x+2) = q^2 f(x)$ — c) la grandeur augmente de 3 % par période, toujours du même taux.

Correction de l'exercice 13 - Vrai ou faux sur les règles de calcul

a) **Faux.** Ajouter deux fois la même quantité, c'est la doubler, pas élever au carré :

$$2^x + 2^x = 2 \times 2^x = 2^{x+1}$$

Contre-exemple en $x = 3$: $8 + 8 = 16 = 2^4$, alors que $2^{2 \times 3} = 64$.

b) **Faux.** La règle de la puissance d'une puissance **multiplie** les exposants :

$$(2^x)^2 = 2^{2x}$$

Contre-exemple en $x = 3$: $(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^6$, alors que $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

c) **Vrai.** C'est la règle du produit de deux bases à exposant commun :

$$2^x \times 3^x = (2 \times 3)^x = 6^x. \text{ Vérification en } x = 2 : 4 \times 9 = 36 = 6^2 \checkmark$$

d) **Vrai.** Le dénominateur 2 vaut 2^1 , et le quotient soustrait les exposants : $\frac{2^x}{2^1} = 2^{x-1}$.

Vérification en $x = 4$: $\frac{16}{2} = 8 = 2^3 \checkmark$

Ce qui distingue les deux erreurs. En a), l'opération est une **somme** : aucune règle du cours ne permet de la transformer en exposant. En b), le tort est de confondre le produit des exposants et l'exposant du carré.

Réponse. a) faux, $= 2^{x+1}$ — b) faux, $= 2^{2x}$ — c) vrai — d) vrai.

Correction de l'exercice 14 - Chercher un seuil par tableau de valeurs

a) À la calculatrice, on obtient les valeurs suivantes.

x	15	16	17	18	19
$1,04^x$	1,8009	1,8730	1,9479	2,0258	2,1068

b) On repère l'endroit où le seuil 2 est franchi :

$$1,04^{17} \approx 1,9479 < 2 \quad \text{et} \quad 1,04^{18} \approx 2,0258 \geq 2$$

Le plus petit entier convenable est donc $x = 18$: le capital a doublé au bout de **18 ans**.

c) La base 1,04 est supérieure à 1, donc la fonction $x \mapsto 1,04^x$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$. Une fois le seuil franchi en $x = 18$, toutes les valeurs suivantes sont supérieures à $1,04^{18}$, donc supérieures à 2. L'ensemble des entiers solutions est $\{18; 19; 20; \dots\}$.

Pourquoi un tableau et pas un calcul exact. L'équation $1,04^x = 2$ a une solution qui n'est pas un nombre simple (environ 17,67) : l'outil qui la donne exactement, le logarithme, n'est pas au programme de Première générale. Le tableau de valeurs, accompagné de l'argument de monotonie, est la réponse attendue — et elle est parfaitement rigoureuse.

Réponse. b) $x = 18$ ans — c) par croissance de $x \mapsto 1,04^x$, tous les entiers $x \geq 18$ conviennent.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une dose qui passe sous un seuil

a) Perdre 15 % revient à conserver 85 %, donc à multiplier par $q = 1 - \frac{15}{100} = 0,85$ chaque heure. Le modèle d'évolution à taux constant donne

$$Q(x) = 500 \times 0,85^x$$

b) On applique la règle du produit sur les exposants :

$$Q(x+1) = 500 \times 0,85^{x+1} = 500 \times 0,85^x \times 0,85 = 0,85 \times Q(x)$$

Autrement dit, chaque heure fait perdre 15 % de ce qui reste — et non 15 % de la dose initiale.

c) L'équation s'écrit $500 \times 0,85^x = 500 \times 0,85^4$. On divise les deux membres par 500, puis on identifie les exposants :

$$0,85^x = 0,85^4 \Leftrightarrow x = 4$$

La quantité annoncée est donc celle mesurée au bout de 4 heures ; elle vaut $500 \times 0,522 = 261$ mg.

d) On cherche $Q(x) < 100$, c'est-à-dire

$$500 \times 0,85^x < 100 \Leftrightarrow 0,85^x < \frac{100}{500} = 0,2$$

Le tableau donne $0,85^9 \approx 0,2316 > 0,2$ et $0,85^{10} \approx 0,1969 < 0,2$. Comme la base est inférieure à 1, la fonction est **décroissante** : le seuil est franchi à la dixième heure et ne sera plus repassé. Au bout de 10 heures, il reste $500 \times 0,1969 = 98,45$ mg, soit moins de 100 mg.

L'erreur à éviter en d). Diviser par 500 avant de comparer est indispensable : comparer directement $0,85^x$ à 100 n'a aucun sens, puisque $0,85^x$ est toujours inférieur à 1.

Réponse. a) $Q(x) = 500 \times 0,85^x$ — b) $Q(x+1) = 0,85 Q(x)$ — c) $x = 4$, soit 261 mg au bout de 4 h — d) au bout de 10 heures (98,45 mg).