

Plaquette 5 - Synthèse : modéliser avec une exponentielle

Fonction exponentielle — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Modéliser une situation par une fonction exponentielle : la démarche complète.

- **Étape 1 — reconnaître le modèle.** À partir d'un tableau de relevés :
différences constantes $\Rightarrow$ affine quotients constants $\Rightarrow$ exponentiel
- **Étape 2 — ajuster le modèle.** La valeur initiale donne V_0 ; le quotient de deux valeurs consécutives donne q . Si l'on ne connaît que deux valeurs séparées de n périodes :

$$q = \left(\frac{V(n)}{V(0)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

- **Étape 3 — exploiter le modèle.** Valeur en un rang : $V(x) = V_0 \times q^x$. Taux global sur n périodes : $(q^n - 1) \times 100$. Taux moyen : $(CM^{1/n} - 1) \times 100$. Seuil : tableau de valeurs plus argument de monotonie.
- **Étape 4 — critiquer le modèle.** Trois limites à savoir énoncer : une exponentielle croissante devient irréaliste à long terme (ressources finies) ; une exponentielle décroissante ne s'annule jamais, alors que la réalité finit par atteindre zéro ; et un taux supposé constant ne l'est jamais très longtemps.
- **Modèle décalé.** Quand une grandeur tend vers une valeur limite L (refroidissement, remplissage), c'est l'**écart** à cette limite qui suit un modèle exponentiel :

$$V(x) = L + (V_0 - L) \times q^x$$

- **Demi-vie et coefficient.** Si une grandeur est divisée par 2 toutes les n périodes, le coefficient par période est $q = 0,5^{\frac{1}{n}}$.

Correction de l'exercice 1 - Choisir entre deux modèles

- a) Pour U , les différences sont $-40, -38, -36, -34$: elles changent. Les quotients, eux :

$$\frac{760}{800} = 0,95 \quad ; \quad \frac{722}{760} = 0,95 \quad ; \quad \frac{686}{722} \approx 0,95 \quad ; \quad \frac{652}{686} \approx 0,95$$

Pour W , les différences valent toutes -40 , tandis que les quotients ($0,95$ puis $\frac{720}{760} \approx 0,947$) ne sont pas constants.

- b) La grandeur U a des **quotients constants** : le modèle est exponentiel, de coefficient $0,95$, soit une baisse de 5 % par an.

$$U(x) = 800 \times 0,95^x$$

La grandeur W a des **différences constantes** : le modèle est affine, de pente -40 .

$$W(x) = 800 - 40x$$

- c) Année 10 :

$$- U(10) = 800 \times 0,95^{10} = 800 \times 0,59874 \approx 479 ;$$

— $W(10) = 800 - 40 \times 10 = 400$.

L'écart est de 79 unités. Les deux modèles étaient presque indiscernables sur les cinq premières années (à 12 unités près), et se séparent nettement ensuite : une baisse **de 5 %** porte sur une valeur qui diminue, donc perd de moins en moins, alors qu'une baisse **de 40 unités** est toujours la même.

Ce que l'exercice apprend. On ne choisit pas un modèle au vu de la seule allure des premières valeurs : on teste différences **et** quotients.

Réponse. a) U : quotients constants égaux à 0,95 ; W : différences constantes égales à -40 — b) $U(x) = 800 \times 0,95^x$ et $W(x) = 800 - 40x$ — c) $U(10) \approx 479$ et $W(10) = 400$.

Correction de l'exercice 2 - Ajuster un modèle sur deux valeurs

a) Le modèle s'écrit $N(x) = 250 \times q^x$. Au bout de 4 mois, on a $N(4) = 366$, donc

$$250 \times q^4 = 366 \Leftrightarrow q^4 = \frac{366}{250} = 1,464$$

Le coefficient cherché est donc

$$q = 1,464^{\frac{1}{4}} = 1,0999... \approx 1,10$$

b) Le coefficient 1,10 correspond à un taux de $(1,10 - 1) \times 100 = 10$ % par mois, d'où le modèle

$$N(x) = 250 \times 1,10^x$$

c) Pour $x = 8$:

$$N(8) = 250 \times 1,1^8 = 250 \times 2,14359 \approx 536 \text{ inscrits}$$

On peut aussi remarquer que $8 = 2 \times 4$, donc $N(8) = 250 \times (q^4)^2 = 250 \times 1,464^2 \approx 536$: le nombre d'inscrits est multiplié par 1,464 tous les quatre mois.

Le principe de l'ajustement. Deux données suffisent à caler un modèle exponentiel : la valeur initiale donne V_0 , le rapport des deux valeurs donne q^n , donc q par un exposant $\frac{1}{n}$.

Réponse. a) $q^4 = 1,464$, donc $q \approx 1,10$ — b) +10 % par mois et $N(x) = 250 \times 1,10^x$ — c) environ 536 inscrits.

Correction de l'exercice 3 - Le café qui refroidit

a) L'écart initial entre le café et la pièce vaut $75 - 20 = 55$ °C. Cet écart diminue de 20 % par minute, donc il est multiplié chaque minute par $q = 0,8$: au bout de x minutes, il vaut $55 \times 0,8^x$. La température du café est celle de la pièce augmentée de cet écart :

$$T(x) = L + (V_0 - L) \times q^x = 20 + 55 \times 0,8^x$$

b) On applique le modèle :

— $T(2) = 20 + 55 \times 0,64 = 20 + 35,2 = 55,2$ °C ;

— $T(5) = 20 + 55 \times 0,32768 = 20 + 18,02 \approx 38,0$ °C.

c) On veut $T(x) < 40$, ce qui se ramène à l'écart :

$$20 + 55 \times 0,8^x < 40 \Leftrightarrow 55 \times 0,8^x < 20 \Leftrightarrow 0,8^x < \frac{20}{55} \approx 0,3636$$

Le tableau donne $0,8^4 \approx 0,4096 > 0,3636$ et $0,8^5 \approx 0,3277 < 0,3636$. Par décroissance, le café passe sous 40 °C au bout de **5 minutes** — ce que confirme le calcul de b) : $T(5) \approx 38,0$ °C.

d) Non. L'écart $55 \times 0,8^x$ est strictement positif pour tout x , donc $T(x) > 20$: le café reste

toujours un peu plus chaud que la pièce. Il s'en approche indéfiniment ($T(30) \approx 20,07^\circ\text{C}$), sans jamais l'atteindre exactement. C'est cohérent avec la physique : la différence devient simplement plus petite que ce qu'un thermomètre peut mesurer.

La structure à retenir. Quand une grandeur tend vers une limite, ce n'est pas elle qui est exponentielle, c'est son **écart à la limite**. Oublier le +20 donnerait un café qui refroidit jusqu'à 0°C .

Réponse. a) l'écart initial est 55°C et se multiplie par 0,8 — b) $T(2) = 55,2^\circ\text{C}$ et $T(5) \approx 38,0^\circ\text{C}$ — c) au bout de 5 minutes — d) non, $T(x) > 20$ pour tout x .

Correction de l'exercice 4 - Une culture de bactéries qui double

a) Une heure contient deux périodes de 30 minutes, donc **deux** doublements. Le nombre est multiplié par 2 puis encore par 2 :

$$q = 2 \times 2 = 2^2 = 4$$

Le coefficient horaire est donc 4.

b) Avec $N_0 = 5\,000$ bactéries :

$$N(t) = 5\,000 \times 4^t$$

Au bout de 3 heures : $N(3) = 5\,000 \times 4^3 = 5\,000 \times 64 = 320\,000$ bactéries.

c) Pour $t = 1,5$ heure, l'exposant n'est pas entier, mais la fonction exponentielle est définie pour tout réel :

$$N(1,5) = 5\,000 \times 4^{1,5} = 5\,000 \times 4 \times \sqrt{4} = 5\,000 \times 8 = 40\,000$$

Contrôle par les doublements : 1,5 heure = 90 minutes = 3 périodes de 30 minutes, donc trois doublements : $5\,000 \times 2^3 = 40\,000$ ✓ Les deux méthodes concordent.

d) Non. Deux jours font 48 heures, et le modèle donnerait

$$N(48) = 5\,000 \times 4^{48} \approx 4 \times 10^{32} \text{ bactéries}$$

soit une masse supérieure à celle de la Terre. En réalité, la croissance ralentit dès que la nourriture manque ou que les déchets s'accumulent : le modèle exponentiel ne décrit que la **phase initiale**, de quelques heures.

L'usage de l'exposant demi-entier. La question c) montre à quoi sert le prolongement des puissances : il permet de calculer à un instant qui ne tombe pas sur un doublement entier.

Réponse. a) deux doublements, donc $q = 4$ — b) $N(t) = 5\,000 \times 4^t$ et $N(3) = 320\,000$ — c) $N(1,5) = 40\,000$ — d) non, $N(48) \approx 4 \times 10^{32}$ est absurde.

Correction de l'exercice 5 - Croissance d'une communauté en ligne

a) Une hausse de 8 % par mois donne le coefficient $q = 1,08$, donc

$$A(x) = 12\,000 \times 1,08^x$$

Au bout de cinq mois : $A(5) = 12\,000 \times 1,46933 = 17\,631,9... \approx 17\,632$ abonnés.

b) Un semestre compte 6 mois, donc le coefficient global est $1,08^6 \approx 1,5869$, d'où

$$t_{\text{global}} = (1,5869 - 1) \times 100 \approx 58,69 \%$$

et non $6 \times 8 = 48 \%$: l'écart est ici de plus de dix points, car le taux mensuel est élevé.

c) On cherche le plus petit entier x tel que $A(x) \geq 20\,000$:

$$12\,000 \times 1,08^x \geq 20\,000 \Leftrightarrow 1,08^x \geq \frac{20\,000}{12\,000} = \frac{5}{3} \approx 1,6667$$

Les valeurs fournies donnent $1,08^6 \approx 1,5869 < 1,6667$ et $1,08^7 \approx 1,7138 \geq 1,6667$. La fonction étant croissante, il faut **7 mois**. On peut contrôler :

$$A(7) = 12\,000 \times 1,7138 \approx 20\,566 \text{ abonnés } \checkmark$$

Le réflexe de la question c). Diviser le seuil par la valeur initiale avant de consulter le tableau : on ne compare jamais un coefficient à un effectif.

Réponse. a) $A(x) = 12\,000 \times 1,08^x$ et $A(5) \approx 17\,632$ — b) environ +58,69 % — c) 7 mois.

Correction de l'exercice 6 - Deux tarifs de location

a) On calcule les deux coûts pour chaque durée :

x	0	3	4
$C_A(x)$	300	420	460
$C_B(x)$	200	390,625	488,28

Détail pour la formule B : $C_B(3) = 200 \times 1,25^3 = 200 \times 1,953125 = 390,625 \text{ €}$ et $C_B(4) = 200 \times 1,25^4 = 200 \times 2,441406... \approx 488,28 \text{ €}$.

b) Au mois 3, la formule B est encore la moins chère (390,63 € contre 420 €) ; au mois 4, elle est devenue la plus chère (488,28 € contre 460 €). La formule **A** devient donc la moins chère à partir du **quatrième mois**, ce que confirme le graphique : les deux courbes se croisent entre $x = 3$ et $x = 4$.

c) Parce que les deux coûts ne grandissent pas de la même façon :

$$C_A(x+1) - C_A(x) = 40 \text{ alors que } C_B(x+1) = 1,25 \times C_B(x)$$

Le coût A augmente de 40 € chaque mois, toujours pareil. Le coût B augmente de 25 % du montant déjà atteint, donc de plus en plus (de 78 € entre le mois 2 et le mois 3, puis de 98 € entre le mois 3 et le mois 4). Une croissance exponentielle dépasse toujours, à terme, une croissance affine : les frais fixes et la pente de A ne changent que le **moment** du croisement, jamais son existence.

Le conseil concret. La formule B n'est intéressante que pour une location courte ; au-delà de trois mois, elle devient rapidement pénalisante.

Réponse. a) 300 et 200 ; 420 et 390,63 ; 460 et 488,28 — b) à partir du mois 4 — c) une croissance de 25 % par mois dépasse toujours une hausse fixe de 40 € par mois.

Correction de l'exercice 7 - Valeur de revente d'un véhicule

a) Perdre 18 % par an revient à conserver 82 % de la valeur, donc à multiplier par $q = 0,82$:

$$V(x) = 32\,000 \times 0,82^x$$

Au bout de trois ans : $V(3) = 32\,000 \times 0,551368 = 17\,643,8... \approx 17\,644 \text{ €}$.

b) On cherche $V(x) < \frac{32\,000}{2} = 16\,000 \text{ €}$, c'est-à-dire, après division par 32 000 :

$$0,82^x < 0,5$$

Les valeurs fournies donnent $0,82^3 \approx 0,5514 > 0,5$ et $0,82^4 \approx 0,4521 < 0,5$. La fonction étant décroissante, la valeur passe sous la moitié du prix d'achat au bout de **4 ans**.

c) Sur cinq ans, le coefficient global est

$$0,82^5 = 0,370\,740\dots$$

d'où le taux global

$$t = (0,370\,740 - 1) \times 100 \approx -62,93 \%$$

Le véhicule a perdu près de 63 % de sa valeur en cinq ans, et non $5 \times 18 = 90 \%$: chaque baisse porte sur une valeur déjà réduite.

Le vocabulaire des professionnels. C'est le principe de l'amortissement **dégressif** : la perte en euros est forte les premières années (5 760 € la première) et faible ensuite (2 600 € la cinquième), alors que le **pourcentage** reste le même.

Réponse. a) $V(x) = 32\,000 \times 0,82^x$ et $V(3) \approx 17\,644$ € — b) au bout de 4 ans — c) environ $-62,93 \%$.

Correction de l'exercice 8 - Du temps de demi-vie au taux annuel

a) Appliquer 30 fois le coefficient annuel doit diviser la masse par 2, donc multiplier par 0,5 :

$$q^{30} = 0,5$$

On résout avec l'exposant fractionnaire du cours :

$$q = 0,5^{\frac{1}{30}} = 0,977\,159\dots$$

b) Le coefficient 0,977 159 correspond au taux

$$t = (0,977\,159 - 1) \times 100 \approx -2,28 \%$$

La masse diminue donc d'environ 2,28 % par an. On remarque que ce n'est pas $\frac{50}{30} \approx 1,67 \%$: les pertes ne s'additionnent pas.

c) **Première méthode**, avec le coefficient annuel :

$$m(100) = 240 \times 0,977\,159^{100} = 240 \times 0,099\,21 \approx 24 \text{ g}$$

Seconde méthode, en comptant les demi-vies : 100 ans, c'est $\frac{100}{30} = \frac{10}{3}$ demi-vies, donc

$$m(100) = 240 \times 0,5^{\frac{10}{3}} = 240 \times 0,099\,21 \approx 24 \text{ g}$$

Les deux méthodes donnent le même résultat : il reste environ 24 g, soit un peu moins du dixième de la masse initiale.

Ce que l'exercice montre. Une demi-vie est un **taux constant déguisé** : toute donnée de demi-vie se convertit en coefficient par période avec un exposant $\frac{1}{n}$, et réciproquement.

Réponse. a) $q^{30} = 0,5$ donc $q \approx 0,977\,159$ — b) environ $-2,28 \%$ par an — c) environ 24 g.

Correction de l'exercice 9 - Les débuts d'une épidémie

a) Le coefficient hebdomadaire est $q = 1,4$ et la valeur initiale $C_0 = 120$ cas, donc

$$C(x) = 120 \times 1,4^x$$

En semaine 4 : $C(4) = 120 \times 1,4^4 = 120 \times 3,8416 = 460,99\dots \approx 461$ cas.

b) Le taux hebdomadaire vaut $(1,4 - 1) \times 100 = 40 \%$. Sur quatre semaines, le coefficient global est $1,4^4 = 3,8416$, donc

$$t_{\text{global}} = (3,8416 - 1) \times 100 \approx 284,16 \%$$

Le nombre de cas a presque quadruplé en un mois.

c) Au bout d'un an, soit 52 semaines :

$$C(52) = 120 \times 1,4^{52} \approx 120 \times 3,97 \times 10^7 \approx 4,8 \times 10^9$$

soit environ 4,8 milliards de cas hebdomadaires — bien plus que les 68 millions d'habitants. Le modèle est donc manifestement faux à cette échéance.

d) Parce qu'une croissance à taux constant suppose que chaque malade rencontre autant de personnes contaminables qu'au début. Or la population n'est pas infinie : à mesure que l'épidémie progresse, les personnes déjà immunisées, les mesures sanitaires et les changements de comportement réduisent le taux de transmission. Le modèle exponentiel ne décrit correctement que la **phase de démarrage**, quand la proportion de personnes contaminées reste faible.

La compétence évaluée. Savoir qu'un modèle exponentiel croissant est toujours **local** : il s'ajuste bien sur quelques périodes et devient absurde à long terme. Le dire explicitement fait partie de la réponse attendue.

Réponse. a) $C(x) = 120 \times 1,4^x$ et $C(4) \approx 461$ cas — b) +40 % par semaine, soit environ +284,16 % en quatre semaines — c) oui, environ 4,8 milliards, ce qui est absurde — d) la population est finie et le taux de transmission diminue.

Correction de l'exercice 10 - Prix de l'immobilier et taux moyen

a) Le coefficient global est le quotient du prix final par le prix initial :

$$CM = \frac{300\,000}{180\,000} = \frac{5}{3} = 1,666\,7...$$

Le taux global est donc $(1,6667 - 1) \times 100 \approx 66,67\%$: le prix a augmenté de deux tiers en vingt ans.

b) Le taux annuel moyen correspond au coefficient q tel que $q^{20} = \frac{5}{3}$, soit

$$q = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{20}} = 1,025\,87...$$

D'où $t_{\text{moyen}} = (1,025\,87 - 1) \times 100 \approx 2,59\%$ par an. Une hausse annuelle modeste suffit donc à produire +66,67 % en vingt ans.

c) On poursuit le modèle dix ans de plus, à partir de 300 000 € :

$$P = 300\,000 \times 1,025\,87^{10} = 300\,000 \times 1,291\,0 \approx 387\,000 \text{ €}$$

Le prix passerait donc à environ 387 000 €.

La prudence obligatoire. Un taux moyen **résume** le passé, il ne prédit pas l'avenir : les prix de l'immobilier connaissent des baisses que le modèle exponentiel ignore. La question c) est un prolongement du modèle, pas une prévision fiable — et il faut l'écrire dans la conclusion.

Réponse. a) $CM = \frac{5}{3}$, soit environ +66,67 % — b) environ +2,59 % par an — c) environ 387 000 €.

Correction de l'exercice 11 - Les effectifs d'un club de sport

a) On calcule les quotients de deux effectifs consécutifs :

$$\frac{207}{180} = 1,15 \quad ; \quad \frac{238}{207} \approx 1,15 \quad ; \quad \frac{274}{238} \approx 1,15 \quad ; \quad \frac{315}{274} \approx 1,15$$

Les quotients sont constants (aux arrondis près) : le modèle est bien **exponentiel**, de

coefficient 1,15.

b) La saison 1 correspond à $x = 0$, donc $L_0 = 180$ licenciés :

$$L(x) = 180 \times 1,15^x$$

Le taux annuel est $(1,15 - 1) \times 100 = 15\%$: le club gagne 15 % de licenciés par saison.

c) On cherche le plus petit entier x tel que $L(x) \geq 400$:

$$180 \times 1,15^x \geq 400 \Leftrightarrow 1,15^x \geq \frac{400}{180} \approx 2,2222$$

Les valeurs fournies donnent $1,15^5 \approx 2,0114 < 2,2222$ et $1,15^6 \approx 2,3131 \geq 2,2222$. Par croissance, il faut $x = 6$, c'est-à-dire la **saison 7** (six saisons après la saison 1). On contrôle : $L(6) = 180 \times 2,3131 \approx 416$ licenciés, effectivement au-delà de 400.

Le décalage de rang, encore. $x = 6$ ne désigne pas la saison 6 mais la septième : la saison 1 est le rang 0. C'est l'erreur la plus fréquente sur ce type de question.

Réponse. a) oui, tous les quotients valent 1,15 — b) $L(x) = 180 \times 1,15^x$, soit +15 % par saison — c) à la saison 7 ($x = 6$, environ 416 licenciés).

Correction de l'exercice 12 - Garantie d'un panneau solaire

a) Perdre 0,5 % par an revient à multiplier chaque année par

$$q = 1 - \frac{0,5}{100} = 0,995$$

Le rendement, exprimé en pourcentage de la puissance initiale, est donc

$$R(x) = 100 \times 0,995^x$$

b) Pour $x = 25$:

$$R(25) = 100 \times 0,995^{25} = 100 \times 0,8822\dots \approx 88,22\%$$

Comme $88,22\% > 85\%$, la garantie est **tenue**, avec même une marge de plus de trois points.

c) On cherche le plus petit entier x tel que $R(x) < 85$, c'est-à-dire $0,995^x < 0,85$. Les valeurs fournies donnent $0,995^{32} \approx 0,8518 > 0,85$ et $0,995^{33} \approx 0,8475 < 0,85$. Le rendement étant décroissant (base inférieure à 1), le seuil est franchi au bout de **33 ans** — soit huit ans après la fin de la garantie.

Le sens commercial du calcul. Le fabricant choisit ses chiffres de façon que la garantie soit tenue avec une marge : annoncer 85 % à 25 ans avec une perte de 0,5 % par an lui laisse huit années de sécurité.

Réponse. a) $R(x) = 100 \times 0,995^x$ — b) $R(25) \approx 88,22\%$: garantie tenue — c) au bout de 33 ans.

Correction de l'exercice 13 - Intérêts simples ou composés

a) Avec des intérêts **simples**, on ajoute chaque année 5 % de 1 000 €, soit 50 € : c'est une fonction **affine**.

$$S(x) = 1\,000 + 50x$$

Avec des intérêts **composés**, on multiplie chaque année par 1,05 : c'est une fonction **exponentielle**.

$$C(x) = 1\,000 \times 1,05^x$$

b) Au bout de dix ans :

- $S(10) = 1\,000 + 50 \times 10 = 1\,500,00 \text{ €}$;
- $C(10) = 1\,000 \times 1,05^{10} = 1\,000 \times 1,628\,894... \approx 1\,628,89 \text{ €}$.

Les intérêts composés rapportent donc 128,89 € de plus, soit près de 9 % du capital initial.

c) L'écart est $C(x) - S(x)$. On le calcule autour des valeurs fournies :

- pour $x = 7$: $C(7) \approx 1\,407,10 \text{ €}$ et $S(7) = 1\,350 \text{ €}$, soit un écart de 57,10 € ;
- pour $x = 8$: $C(8) \approx 1\,477,50 \text{ €}$ et $S(8) = 1\,400 \text{ €}$, soit un écart de 77,50 € ;
- pour $x = 9$: $C(9) = 1\,000 \times 1,05^9 \approx 1\,551,33 \text{ €}$ et $S(9) = 1\,450 \text{ €}$, soit un écart de 101,33 €.

L'écart dépasse donc 100 € au bout de **9 ans**, et continue ensuite de grandir puisque l'un des deux capitaux croît de façon exponentielle et l'autre de façon affine.

La leçon financière. Sur une durée courte, les deux contrats sont presque équivalents ; c'est la durée qui fait toute la valeur des intérêts composés.

Réponse. a) $S(x) = 1\,000 + 50x$ (affine) et $C(x) = 1\,000 \times 1,05^x$ (exponentielle) — b) 1 500 € contre 1 628,89 € — c) au bout de 9 ans (écart de 101,33 €).

Correction de l'exercice 14 - Deux villes, deux dynamiques

a) Les deux modèles sont à taux constant, avec des coefficients de sens opposé :

$$P_A(x) = 60\,000 \times 1,025^x \quad \text{et} \quad P_B(x) = 75\,000 \times 0,99^x$$

b) 2025 correspond à $x = 10$:

- $P_A(10) = 60\,000 \times 1,025^{10} = 60\,000 \times 1,280\,08... \approx 76\,805$ habitants ;
- $P_B(10) = 75\,000 \times 0,99^{10} = 75\,000 \times 0,904\,38... \approx 67\,828$ habitants.

En 2025, la ville A est donc déjà la plus peuplée.

c) On calcule les deux populations pour les rangs du tableau :

x	6	7	8
$P_A(x)$	69 582	71 322	73 104
$P_B(x)$	70 613	69 908	69 203

En $x = 6$, la ville B est encore devant ($70\,613 > 69\,582$) ; en $x = 7$, l'ordre s'inverse ($71\,322 > 69\,908$). Le dépassement a donc lieu en $x = 7$, c'est-à-dire en **2022**.

Pourquoi le dépassement était inévitable. L'une des populations croît et l'autre décroît : l'écart se réduit à chaque année, donc le croisement finit toujours par arriver, même si A partait de 15 000 habitants de moins.

La méthode générale. Comparer deux modèles exponentiels, c'est comparer leurs valeurs rang par rang (ou le quotient $\frac{P_A(x)}{P_B(x)}$, qui est lui aussi une exponentielle, de base $\frac{1,025}{0,99} \approx 1,0354$).

Réponse. a) $P_A(x) = 60\,000 \times 1,025^x$ et $P_B(x) = 75\,000 \times 0,99^x$ — b) environ 76 805 et 67 828 habitants — c) en 2022 ($x = 7$).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la consommation d'un centre de données

a) Une hausse de 11 % par an correspond au coefficient $q = 1,11$, donc

$$E(x) = 18 \times 1,11^x$$

Pour 2026, soit $x = 6$:

$$E(6) = 18 \times 1,11^6 = 18 \times 1,87041... = 33,667... \approx 33,7 \text{ GWh}$$

b) Le coefficient global sur six ans est $1,11^6 \approx 1,87041$, d'où

$$t_{\text{global}} = (1,87041 - 1) \times 100 \approx 87,04 \%$$

La consommation a donc presque doublé en six ans, alors que l'addition des taux annoncerait $6 \times 11 = 66 \%$.

c) On cherche les entiers x tels que $E(x) \leq 45$, soit

$$18 \times 1,11^x \leq 45 \Leftrightarrow 1,11^x \leq \frac{45}{18} = 2,5$$

Les valeurs fournies donnent $1,11^8 \approx 2,3045 \leq 2,5$ et $1,11^9 \approx 2,5580 > 2,5$. La fonction étant croissante, le plafond est respecté jusqu'à $x = 8$, c'est-à-dire jusqu'en **2028** (où la consommation vaut environ 41,5 GWh) ; il est dépassé dès 2029.

d) Le coefficient annuel du nombre de calculs est

$$\frac{1,11}{0,96} = 1,15625$$

soit un taux de $(1,15625 - 1) \times 100 \approx 15,63 \%$ par an. Autrement dit, le nombre de calculs croît plus vite que la consommation (15,63 % contre 11 %) : les machines deviennent plus efficaces, mais cette efficacité est entièrement absorbée par l'augmentation de l'activité. La consommation totale continue donc de monter.

e) Non. En 2070, soit $x = 50$, le modèle donnerait

$$E(50) = 18 \times 1,11^{50} \approx 18 \times 184,6 \approx 3\,300 \text{ GWh}$$

soit la consommation de plusieurs centrales : aucun site ne peut être raccordé à une telle puissance. Un taux de 11 % par an ne peut pas se maintenir cinquante ans — les limites physiques, le coût de l'électricité et les contraintes réglementaires interviendront bien avant. Le modèle est utilisable sur **cinq à dix ans**, pas sur un demi-siècle.

Ce que le correcteur attend. Les quatre gestes de la démarche : poser le modèle (a), en tirer un taux global (b), franchir un seuil avec un tableau et la monotonie (c), et **critiquer** la validité à long terme (e). La question d) rappelle enfin qu'un quotient de deux coefficients est encore un coefficient.

Réponse. a) $E(x) = 18 \times 1,11^x$ et $E(6) \approx 33,7 \text{ GWh}$ — b) environ +87,04 % — c) jusqu'en 2028 ($x = 8$) — d) +15,63 % par an : l'activité croît plus vite que la consommation — e) non, $E(50) \approx 3\,300 \text{ GWh}$ est irréaliste.