

Plaquette 3 - Variations et lectures graphiques

Fonction exponentielle — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Variations et représentation graphique de $x \mapsto q^x$.

- **Sens de variation.** Il ne dépend que de la base :

$$q > 1 \Rightarrow x \mapsto q^x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

$$0 < q < 1 \Rightarrow x \mapsto q^x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}$$

- **Comparer deux puissances de même base.** Si $q > 1 : a < b \Rightarrow q^a < q^b$. Si $0 < q < 1$, l'ordre s'inverse.
- **Points et allure de la courbe.** Toute courbe d'exponentielle passe par $(0 ; 1)$ et par $(1 ; q)$. Elle est entièrement **au-dessus** de l'axe des abscisses, puisque

$$q^x > 0 \text{ pour tout réel } x$$

Du côté où la fonction décroît, la courbe se rapproche de l'axe des abscisses sans jamais le couper.

- **Deux bases inverses, deux courbes symétriques.** Les courbes de $x \mapsto q^x$ et de $x \mapsto \left(\frac{1}{q}\right)^x = q^{-x}$ sont symétriques par rapport à l'**axe des ordonnées**.
- **Résoudre graphiquement.** Pour $f(x) = k$: on trace la droite horizontale d'équation $y = k$ et on lit l'abscisse du point d'intersection. Pour $f(x) \geq k$: on lit l'ensemble des abscisses des points de la courbe situés **au-dessus** de cette droite.
- **Encadrer une solution par balayage.** On calcule f aux entiers voisins, puis aux dixièmes, jusqu'à obtenir l'encadrement demandé. On conclut toujours en invoquant la **monotonie** de la fonction.
- **Croissance comparée.** Une fonction exponentielle de base $q > 1$ finit toujours par dépasser une fonction affine, quelles que soient les valeurs de départ : le facteur répété l'emporte sur le terme ajouté.

Correction de l'exercice 1 - Croissante ou décroissante ?

Le critère du cours ne regarde que la base, et uniquement sa position par rapport à 1 :

$$q > 1 \Rightarrow \text{croissante} \quad 0 < q < 1 \Rightarrow \text{décroissante}$$

a) $1,15 > 1$, donc f est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

b) $0 < 0,95 < 1$, donc g est strictement **décroissante**. La base est proche de 1 : la décroissance est lente, mais elle est bien réelle ($g(100) \approx 0,0059$).

c) $\frac{1}{3} \approx 0,333$ est compris entre 0 et 1, donc h est strictement **décroissante**. On peut aussi écrire $h(x) = 3^{-x}$, ce qui donne la même conclusion.

d) $1,001 > 1$, donc k est strictement **croissante**, même si sa croissance est très lente : $k(1) = 1,001$ seulement. Mais sur le long terme, $k(1\,000) \approx 2,717$: la base a fini par doubler la valeur.

Le piège. Une base « presque égale à 1 » ne rend pas la fonction constante. Seule $q = 1$ donne la fonction constante, et cette base est justement exclue de la définition.

Réponse. a) croissante — b) décroissante — c) décroissante — d) croissante.

Correction de l'exercice 2 - Dresser un tableau de variations

a) On utilise la définition et la règle de l'exposant négatif :

$$f(3) = 1,8^3 = 1,8 \times 1,8 \times 1,8 = 5,832$$

$$f(-3) = 1,8^{-3} = \frac{1}{1,8^3} = \frac{1}{5,832} = 0,171\,46\dots \approx 0,1715$$

b) La base 1,8 est supérieure à 1, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-3; 3]$. Le tableau ne comporte donc qu'une seule flèche, montante, des valeurs calculées en a).

x	-3		3
variations de f	0,1715	croissante	5,832

c) Une fonction croissante atteint son minimum à la borne gauche et son maximum à la borne droite de l'intervalle :

— minimum $f(-3) \approx 0,1715$, atteint en $x = -3$;

— maximum $f(3) = 5,832$, atteint en $x = 3$.

Ce qu'il faut rédiger. Le sens de variation se justifie par la base ($1,8 > 1$), jamais par « on voit sur la calculatrice ». Les valeurs aux bornes, elles, se calculent.

Réponse. a) $f(-3) \approx 0,1715$ et $f(3) = 5,832$ — b) croissante sur $[-3; 3]$ — c) minimum $\approx 0,1715$ en -3 , maximum 5,832 en 3.

Correction de l'exercice 3 - Comparer sans calculatrice

On utilise la règle de comparaison du cours, dont le sens dépend de la base :

$$q > 1: a < b \Leftrightarrow q^a < q^b \quad 0 < q < 1: a < b \Leftrightarrow q^a > q^b$$

a) Base $1,3 > 1$, fonction croissante. Comme $5 < 7$, on a $1,3^5 < 1,3^7$.

b) Base $0,7 < 1$, fonction décroissante : l'ordre s'inverse. Comme $4 < 6$, on a $0,7^4 > 0,7^6$.

c) Base $1,2 > 1$, fonction croissante. Il faut comparer les exposants : $-3 < -1$, donc $1,2^{-3} < 1,2^{-1}$.

d) Base $0,9 < 1$, fonction décroissante. Comme $-2 < 2$, on a $0,9^{-2} > 0,9^2$. On le contrôle : $0,9^{-2} = \frac{1}{0,81} \approx 1,23$ et $0,9^2 = 0,81$.

L'erreur classique. Comparer -3 et -1 en oubliant le signe : -3 est bien **inférieur** à -1 . Deux inversions se cumulent parfois (base inférieure à 1 **et** exposants négatifs) : il faut alors traiter les deux points l'un après l'autre, sans aller vite.

Réponse. a) $1,3^5 < 1,3^7$ — b) $0,7^4 > 0,7^6$ — c) $1,2^{-3} < 1,2^{-1}$ — d) $0,9^{-2} > 0,9^2$.

Correction de l'exercice 4 - Lire une courbe point par point

a) Par lecture graphique, la courbe coupe l'axe des ordonnées en 1, donc $f(0) = 1$; au-dessus de $x = 2$, on lit une ordonnée d'environ 2 (un peu en dessous). Le calcul confirme :

$$f(0) = 1,4^0 = 1 \quad \text{et} \quad f(2) = 1,4 \times 1,4 = 1,96$$

La lecture graphique donnait « à peine moins que 2 » : c'est bien 1,96.

b) On trace mentalement la droite horizontale d'équation $y = 2$: elle coupe la courbe juste à droite de $x = 2$. On lit $x \approx 2,1$.

c) On encadre en calculant aux deux entiers voisins :

$$- f(2) = 1,96 < 2 ;$$

$$- f(3) = 1,4^3 = 2,744 > 2.$$

La base 1,4 étant supérieure à 1, f est strictement croissante : la valeur 2 est donc atteinte pour un unique x , situé entre 2 et 3. La lecture graphique ($x \approx 2,1$) est cohérente avec cet encadrement.

Pourquoi on encadre. Une lecture graphique se lit à un ou deux dixièmes près ; seul le calcul aux entiers voisins, joint à la monotonie, permet d'**affirmer** quelque chose.

Réponse. a) $f(0) = 1$ et $f(2) = 1,96$ — b) $x \approx 2,1$ — c) $f(2) = 1,96 < 2 < 2,744 = f(3)$ et f est croissante.

Correction de l'exercice 5 - Deux bases inverses sur un même repère

a) La base de u vaut $2 > 1$: la fonction est **croissante**, donc C_1 , la courbe qui monte, est celle de u . La base de v vaut $0,5 < 1$: v est **décroissante**, donc C_2 est celle de v .

b) Les deux calculs :

$$- u(3) = 2^3 = 8 ;$$

$$- v(-3) = 0,5^{-3} = \frac{1}{0,5^3} = \frac{1}{0,125} = 8.$$

On obtient la **même valeur** : les deux courbes passent respectivement par $(3 ; 8)$ et $(-3 ; 8)$, deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

c) On écrit la base de v comme une puissance de 2 : $0,5 = 2^{-1}$, donc

$$v(x) = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x} = u(-x)$$

Remplacer x par $-x$ dans une expression revient géométriquement à **symétriser la courbe par rapport à l'axe des ordonnées**. La courbe de v est donc l'image de celle de u par cette symétrie — ce que confirme la question b).

Conséquence utile. Il suffit de savoir tracer les exponentielles de base supérieure à 1 : celles de base inférieure à 1 s'en déduisent par un simple retournement.

Réponse. a) C_1 est celle de u (croissante), C_2 celle de v — b) $u(3) = v(-3) = 8$ — c) $v(x) = 2^{-x} = u(-x)$: symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Correction de l'exercice 6 - Associer chaque courbe à sa base

a) La base 0,6 est comprise entre 0 et 1 : la fonction est **décroissante**. Une seule courbe descend, C_D : c'est celle de $0,6^x$.

b) Les deux autres montent, il faut donc les comparer en un point. En $x = 2$:

$$1,5^2 = 2,25 \quad \text{et} \quad 2,5^2 = 6,25$$

La courbe qui atteint environ 2,25 en $x = 2$ est C_A : c'est celle de $1,5^x$. Celle qui atteint 6,25 est C_B , donc celle de $2,5^x$.

c) Parce que l'exposant 0 donne 1 quelle que soit la base :

$$q^0 = 1 \quad \text{pour tout } q > 0$$

Les trois courbes passent donc par le point de coordonnées $(0 ; 1)$, et c'est leur seul point commun : à droite de 0, plus la base est grande, plus la courbe est haute ; à gauche de 0, c'est l'inverse.

La méthode générale. Pour identifier une exponentielle sur un graphique : d'abord le

sens de variation (base plus grande ou plus petite que 1), puis une valeur en $x = 1$ ou $x = 2$ pour départager.

Réponse. a) C_D — b) C_A pour $1,5^x$ ($1,5^2 = 2,25$) et C_B pour $2,5^x$ ($2,5^2 = 6,25$) — c) toutes passent par $(0; 1)$.

Correction de l'exercice 7 - Résoudre une inéquation graphiquement

a) Résoudre $f(x) \geq 3$, c'est chercher les abscisses des points de la courbe situés **au-dessus** (ou sur) la droite d'équation $y = 3$. Sur le graphique, la courbe passe au-dessus de cette droite à partir d'une abscisse un peu supérieure à 2,7. L'ensemble des solutions est donc approximativement

$$S \approx [2,7; +\infty[$$

b) On calcule les images des entiers voisins :

- $f(2) = 1,5^2 = 2,25 < 3$;
- $f(3) = 1,5^3 = 3,375 > 3$.

La fonction étant strictement croissante (base $1,5 > 1$), la solution de $f(x) = 3$ est unique et comprise entre 2 et 3.

c) L'élève a confondu la **valeur** 3 portée par la droite ($y = 3$) avec l'**abscisse** du point d'intersection. Or $f(3) = 3,375$, et non 3 : l'abscisse cherchée vaut environ 2,7, pas 3. Sa réponse exclut à tort tous les x entre 2,7 et 3, pour lesquels on a bien $f(x) \geq 3$.

Le contrôle à faire. Tester une valeur de l'intervalle proposé : $f(2,8) \approx 3,16 \geq 3$ ✓ alors que 2,8 n'appartient pas à l'ensemble annoncé par l'élève.

Réponse. a) $S \approx [2,7; +\infty[$ — b) la solution de $f(x) = 3$ est entre 2 et 3 — c) il a lu l'ordonnée de la droite au lieu de l'abscisse du point d'intersection.

Correction de l'exercice 8 - Une courbe qui ne coupe jamais l'axe

a) On calcule à la calculatrice, puis on écrit en notation scientifique :

- $f(50) = 0,9^{50} = 0,005\,15\dots \approx 5,15 \times 10^{-3}$;
- $f(100) = 0,9^{100} = 0,000\,026\,56\dots \approx 2,66 \times 10^{-5}$.

Les valeurs deviennent minuscules, mais elles restent **strictement positives**.

b) Non, l'équation n'a aucune solution. Le cours affirme en effet

$$q^x > 0 \quad \text{pour tout réel } x$$

Une exponentielle ne s'annule jamais : aucun réel x ne peut donner $0,9^x = 0$. Graphiquement, la courbe ne coupe donc **jamais** l'axe des abscisses.

c) Quand x devient très grand, $f(x)$ devient aussi proche de 0 que l'on veut, tout en restant au-dessus : la courbe **se rapproche indéfiniment** de l'axe des abscisses sans jamais l'atteindre. C'est ce qu'on appelle un comportement asymptotique, qui sera nommé et étudié en Terminale.

L'usage concret. Dans un modèle de refroidissement ou d'élimination d'un produit, cela signifie qu'il reste toujours une quantité non nulle : on fixe donc en pratique un **seuil** (de détection, de tolérance) plutôt que d'attendre le zéro.

Réponse. a) $f(50) \approx 5,15 \times 10^{-3}$ et $f(100) \approx 2,66 \times 10^{-5}$ — b) non, $0,9^x > 0$ pour tout x — c) la courbe se rapproche de l'axe des abscisses sans le couper.

Correction de l'exercice 9 - L'exponentielle rattrape l'affine

a) Les calculs donnent

$$f(1) = 1,3 \quad g(1) = 2 \quad f(5) = 1,3^5 \approx 3,71 \quad g(5) = 6$$

Dans les deux cas $f(x) < g(x)$: c'est la fonction **affine** qui est en avance sur cette portion du graphique. L'exponentielle démarre plus lentement.

b) On poursuit :

- $f(8) = 1,3^8 \approx 8,16$ et $g(8) = 9$, donc $f(8) < g(8)$;
- $f(9) = 1,3^9 \approx 10,60$ et $g(9) = 10$, donc $f(9) > g(9)$.

C'est donc à partir de $x = 9$ que f dépasse g . Sur le graphique, c'est l'endroit où la courbe croise la droite.

c) Ensuite, l'écart ne cesse de grandir. La raison est de nature différente pour chaque fonction :

- g **ajoute** 1 chaque fois que x augmente de 1 ;
- f **multiplie** par 1,3, donc son augmentation par unité est elle-même proportionnelle à la valeur atteinte, et grandit à chaque pas.

Une croissance exponentielle finit toujours par dépasser une croissance affine, même si elle part de plus bas et progresse d'abord plus lentement. En $x = 20$, par exemple, $f(20) \approx 190$ contre $g(20) = 21$.

La leçon de modélisation. Comparer deux modèles sur les premières valeurs ne suffit pas : c'est leur **nature** (additive ou multiplicative) qui décide du comportement à long terme.

Réponse. a) $f(1) = 1,3 < 2$ et $f(5) \approx 3,71 < 6$: g est en avance — b) f dépasse g à partir de $x = 9$ ($10,60 > 10$) — c) l'écart grandit ensuite indéfiniment.

Correction de l'exercice 10 - Extremums d'une exponentielle décroissante

a) La base vérifie $0 < 0,85 < 1$, donc, d'après le cours, g est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0; 10]$.

$$0 < q < 1 \Rightarrow x \mapsto q^x \text{ strictement décroissante}$$

b) Une fonction décroissante atteint son **maximum** à la borne gauche et son **minimum** à la borne droite :

- maximum : $g(0) = 0,85^0 = 1$, atteint en $x = 0$ — aucun calcul n'est nécessaire, l'exposant 0 donne toujours 1 ;
- minimum : $g(10) = 0,85^{10} = 0,19687... \approx 0,197$, atteint en $x = 10$.

c) Puisque g est décroissante sur $[0; 10]$, toutes ses valeurs sont comprises entre celles des bornes :

$$0,197 \leq g(x) \leq 1 \quad \text{pour tout } x \in [0; 10]$$

(plus précisément $g(10) \leq g(x) \leq g(0)$, avec $g(10) = 0,85^{10}$).

L'interprétation. Si $g(x)$ est la proportion restante d'une substance après x heures, l'encadrement dit qu'au bout de 10 heures il reste au moins 19,7 % de la quantité initiale — et jamais plus de 100 %, ce qui est heureux.

Réponse. a) décroissante car $0 < 0,85 < 1$ — b) maximum $g(0) = 1$, minimum $g(10) \approx 0,197$ — c) $0,197 \leq g(x) \leq 1$.

Correction de l'exercice 11 - Une croissance de plus en plus rapide

a) On calcule les deux images, puis leur différence :

$$f(1) - f(0) = 1,2 - 1 = 0,2$$

b) De même, avec $f(4) = 1,2^4 = 2,0736$ et $f(5) = 1,2^5 = 2,48832$:

$$f(5) - f(4) = 2,48832 - 2,0736 = 0,41472$$

L'écart a plus que doublé.

c) Parce que le taux constant porte sur une **multiplication**, pas sur une addition. La propriété du cours s'écrit

$$f(x+1) = 1,2 \times f(x) \quad \text{donc} \quad f(x+1) - f(x) = 0,2 \times f(x)$$

L'augmentation vaut donc toujours **20 % de la valeur atteinte** : comme cette valeur grandit, l'augmentation en valeur absolue grandit aussi. On le vérifie : $0,2 \times f(0) = 0,2$ et $0,2 \times f(4) = 0,2 \times 2,0736 = 0,41472$ ✓

C'est exactement ce qui donne à la courbe son allure de plus en plus redressée : un pourcentage constant ne signifie pas une pente constante.

À comparer. Pour une fonction affine $g(x) = 0,2x + 1$, l'écart $g(x+1) - g(x)$ vaudrait 0,2 pour **toute** valeur de x . C'est la différence de fond entre les deux modèles.

Réponse. a) 0,2 — b) 0,41472 — c) l'augmentation vaut 20 % de la valeur atteinte, qui grandit : $f(x+1) - f(x) = 0,2 f(x)$.

Correction de l'exercice 12 - Lire un seuil sur le graphique d'un placement

a) Au-dessus de $x = 5$, on lit une ordonnée d'environ 7 350 €. Le calcul le confirme, avec le modèle de l'énoncé :

$$C(5) = 5\,000 \times 1,08^5 = 5\,000 \times 1,46932... = 7\,346,6... \approx 7\,347 \text{ €}$$

b) On repère l'abscisse du point où la courbe franchit la droite $y = 8\,000$: elle se situe entre 6 et 7, un peu avant 7. Comme les intérêts ne sont versés qu'en fin d'année, le capital **dépasse** 8 000 € au bout de **7 ans**.

c) Deux calculs suffisent, encadrant le seuil :

— $C(6) = 5\,000 \times 1,08^6 \approx 7\,934 \text{ €}$, donc encore en dessous de 8 000 € ;

— $C(7) = 5\,000 \times 1,08^7 \approx 8\,569 \text{ €}$, donc au-dessus.

La fonction étant croissante (base $1,08 > 1$), le seuil est franchi une seule fois, à la septième année, et ne sera plus repassé ensuite.

Ce que le graphique n'apprend pas. Il donne l'ordre de grandeur et l'année approximative ; la réponse rigoureuse vient du couple de calculs encadrant le seuil, accompagné de l'argument de croissance.

Réponse. a) environ 7 347 € — b) au bout de 7 ans — c)

$$C(6) \approx 7\,934 < 8\,000 < 8\,569 \approx C(7).$$

Correction de l'exercice 13 - Encadrer une solution par balayage

a) La base 1,6 est supérieure à 1, donc la fonction $x \mapsto 1,6^x$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$: elle prend chaque valeur au plus une fois, d'où l'unicité de la solution. On l'encadre par deux entiers :

— $1,6^3 = 4,096 < 5$;

— $1,6^4 = 6,5536 > 5$.

La croissance donne donc $3 < x < 4$.

b) On resserre avec les deux valeurs fournies :

$$1,6^{3,4} \approx 4,9432 < 5 < 5,1811 \approx 1,6^{3,5}$$

Toujours par croissance, la solution vérifie $3,4 < x < 3,5$. On peut annoncer $x \approx 3,4$ à un dixième près, et poursuivre le balayage au centième si l'énoncé le demande.

c) Parce que l'outil qui « inverse » une exponentielle est le **logarithme**, introduit en Terminale. Sans lui, on ne peut pas écrire la solution sous forme exacte : on l'encadre d'aussi près que l'on veut par balayage, ce qui suffit dans tous les problèmes concrets (le seuil cherché est de toute façon un nombre entier d'années, d'heures ou d'étapes).

La rédaction attendue. Un balayage n'est une preuve que s'il est accompagné de l'argument de monotonie : c'est lui qui garantit qu'il n'existe pas d'autre solution ailleurs.

Réponse. a) unique solution, $3 < x < 4$ — b) $3,4 < x < 3,5$ — c) il faudrait le logarithme, hors programme en Première.

Correction de l'exercice 14 - Placer des points et tracer la courbe

a) On calcule chaque image avec $f(x) = 1,25^x$, en passant par l'inverse pour les exposants négatifs :

$$1,25^{-2} = \frac{1}{1,25^2} = \frac{1}{1,5625} = 0,64$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	0,64	0,80	1	1,25	1,56	1,95	2,44

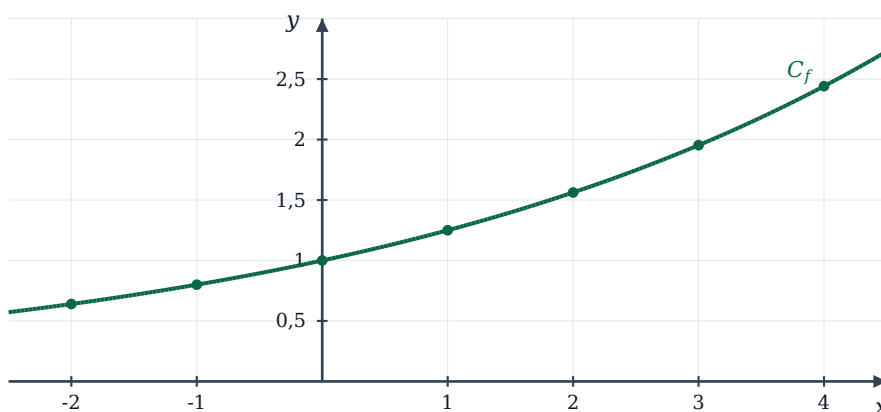
b) On place les sept points puis on les joint par une courbe régulière, **montante** (la base est supérieure à 1) et de plus en plus redressée. La courbe obtenue est tracée dans le corrigé graphique ci-dessous.

c) La courbe **ne coupe pas** l'axe des abscisses, car $1,25^x > 0$ pour tout réel x : aucune image n'est nulle. Elle coupe en revanche l'axe des ordonnées, au point $(0; 1)$, puisque

$$f(0) = 1,25^0 = 1$$

Le contrôle du tracé. Le quotient de deux valeurs consécutives du tableau doit valoir $1,25 : \frac{0,80}{0,64} = 1,25 \checkmark$ et $\frac{2,44}{1,95} \approx 1,25 \checkmark$ (l'écart vient des arrondis). Si un point casse la régularité de la courbe, c'est qu'une valeur est fautive.

Réponse. a) 0,64 ; 0,80 ; 1 ; 1,25 ; 1,56 ; 1,95 ; 2,44 — c) non pour l'axe des abscisses, oui pour l'axe des ordonnées en $(0; 1)$.



Les sept points du tableau et la courbe de $f(x) = 1,25^x$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude d'une décroissance

a) Perdre 25 % par an, c'est multiplier chaque année par $q = 1 - \frac{25}{100} = 0,75$. Comme $0 < 0,75 < 1$, le cours donne

$$0 < q < 1 \Rightarrow x \mapsto q^x \text{ strictement décroissante}$$

La fonction V , produit de $12\,000 > 0$ par cette exponentielle, est donc strictement **décroissante** : la valeur de la pièce ne cesse de baisser.

b) On applique le modèle :

$$- V(2) = 12\,000 \times 0,75^2 = 12\,000 \times 0,5625 = 6\,750 \text{ €} ;$$

$$- V(5) = 12\,000 \times 0,75^5 = 12\,000 \times 0,23730\dots \approx 2\,848 \text{ €}.$$

c) On cherche $V(x) < 3\,000$, c'est-à-dire, après division par $12\,000$:

$$0,75^x < \frac{3\,000}{12\,000} = 0,25$$

Le tableau donne $0,75^4 \approx 0,3164 > 0,25$ et $0,75^5 \approx 0,2373 < 0,25$. Par décroissance, le seuil est franchi à la **cinquième** année et la valeur reste ensuite inférieure à $3\,000 \text{ €}$ — ce que confirme le calcul de b) : $V(5) \approx 2\,848 \text{ €} < 3\,000 \text{ €}$.

d) Non : d'après le modèle, $V(x) = 12\,000 \times 0,75^x > 0$ pour tout x , puisqu'une exponentielle est strictement positive. La valeur devient très faible ($V(20) \approx 38 \text{ €}$) mais jamais nulle. En pratique, la pièce sera mise au rebut bien avant : le modèle exponentiel décrit correctement les premières années, pas la fin de vie de l'objet.

Le réflexe de la question c). Diviser par la valeur initiale avant de comparer au seuil : c'est ce qui permet d'utiliser un tableau des puissances de $0,75$, valable quel que soit le prix de départ.

Réponse. a) décroissante car $0,75 < 1$ — b) $V(2) = 6\,750 \text{ €}$ et $V(5) \approx 2\,848 \text{ €}$ — c) au bout de 5 ans — d) non, $V(x) > 0$ toujours ; le modèle n'est réaliste qu'à court terme.