

Plaquette 1 – Définition et premiers calculs

Fonction exponentielle — Première générale

Exercices

Méthode

Jusqu'ici, un exposant était un **entier** : q^3 voulait dire $q \times q \times q$. La fonction exponentielle de base q étend cette écriture à **tous** les exposants réels, y compris 0, les négatifs et les décimaux. Cette plaquette installe la notation q^x , le calcul des valeurs (à la main quand c'est possible, à la calculatrice sinon) et surtout la **lecture** de la base : $q > 1$ annonce une croissance, $0 < q < 1$ une décroissance. On apprend aussi à reconnaître une exponentielle dans un tableau : ce n'est pas la différence de deux valeurs consécutives qui est constante, c'est leur **quotient**.

Exercice 1 – Les premières valeurs d'une base supérieure à 1

Soit f la fonction exponentielle de base 1,07, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,07^x$.

- Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$ (valeurs exactes).
- Calculer $f(-1)$, arrondi au millième.
- Dans un contexte d'évolution annuelle, que représente le nombre 1,07 ?

Exercice 2 – Une base inférieure à 1

On pose $g(x) = 0,8^x$ pour tout réel x .

- Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$.
- Calculer $g(-2)$ sous forme de fraction, puis en écriture décimale.
- Les valeurs de g augmentent-elles ou diminuent-elles quand x augmente ? Quel pourcentage d'évolution la base 0,8 traduit-elle ?

Exercice 3 – Exposants demi-entiers et racines carrées

Donner la valeur exacte de chacun des nombres suivants, sans calculatrice.

- $4^{0,5}$ et $9^{\frac{1}{2}}$
- $16^{1,5}$
- $25^{-0,5}$
- $100^{0,5} \times 100^{0,5}$

Exercice 4 – Retrouver la base

Une fonction exponentielle h de base q ($q > 0$) vérifie $h(2) = 2,25$.

- Écrire l'équation vérifiée par q , puis déterminer q .
- En déduire $h(1)$ et $h(3)$.
- La fonction h est-elle croissante ou décroissante ?

Exercice 5 - Vrai ou faux sur la définition

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant par la définition du cours.

- a) Il existe un réel x tel que $1,05^x = -2$.
- b) Pour toute base q , on a $q^0 = 0$.
- c) La fonction $x \mapsto (-2)^x$ est une fonction exponentielle.
- d) Si q^x vaut 1 pour un certain $x \neq 0$, alors $q = 1$.

Exercice 6 - Compléter un tableau de valeurs

Recopier et compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = 3^x$. Les valeurs des deux premières colonnes sont à donner sous forme de fraction.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	?	?	?	?	?	?

Exercice 7 - Supprimer les exposants négatifs

Écrire chaque nombre sous forme de fraction ou de nombre décimal, sans exposant négatif.

- a) 2^{-3}
- b) 5^{-1}
- c) $1,1^{-2}$ (arrondi au millième)
- d) $0,5^{-2}$

Exercice 8 - Deux écritures pour la même fonction

On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5^x$ et $v(x) = 2^{-x}$.

- a) Calculer $u(3)$ et $v(3)$.
- b) Démontrer que $u(x) = v(x)$ pour tout réel x .
- c) En déduire une écriture de $\left(\frac{1}{10}\right)^x$ avec la base 10.

Exercice 9 - Exponentielle ou fonction affine ?

Deux grandeurs sont relevées chaque année pendant quatre ans.

Année x	0	1	2	3	4
Grandeur A	200	220	242	266,2	292,82
Grandeur B	200	220	240	260	280

- a) L'une de ces grandeurs suit un modèle exponentiel, l'autre un modèle affine. Laquelle est laquelle ?
- b) Donner l'expression du modèle exponentiel sous la forme $V_0 \times q^x$.
- c) Prévoir avec chaque modèle la valeur de la cinquième année.

Exercice 10 - Population d'une commune

La population d'une commune était de 42 000 habitants en 2020 et augmente de 1,2 % par an. On note $P(x)$ la population x années après 2020.

- Justifier que $P(x) = 42\,000 \times 1,012^x$.
- Estimer la population en 2025 puis en 2030, arrondie à l'habitant.
- Ce modèle est-il crédible jusqu'en 2200 ? Justifier en une phrase.

Exercice 11 - Un capital placé à intérêts composés

Un capital de 2 500 € est placé au taux annuel de 3 %, les intérêts étant chaque année ajoutés au capital.

- Exprimer le capital $C(x)$ au bout de x années.
- Calculer le capital au bout de 8 ans, arrondi au centime.
- De combien d'euros le capital a-t-il augmenté en 8 ans ? Cette augmentation est-elle égale à $8 \times 3\% = 24\%$ du capital initial ?

Exercice 12 - Deux bases en concurrence

On considère $f(x) = 1,2^x$ et $g(x) = 1,3^x$.

- Comparer $f(0)$ et $g(0)$.
- Comparer $f(1)$ et $g(1)$, puis $f(5)$ et $g(5)$ (valeurs exactes).
- Un élève écrit : « comme $1,3 - 1,2 = 0,1$, l'écart entre les deux fonctions vaut toujours 0,1 ». Réfuter cette affirmation.

Exercice 13 - Élimination d'un médicament

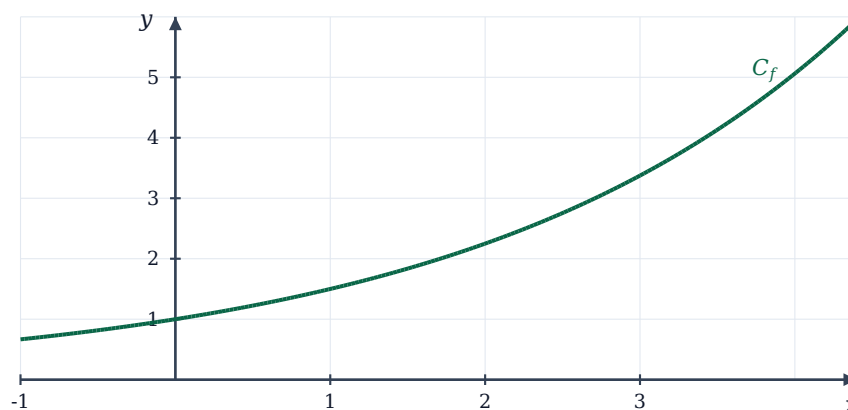
Une dose de 400 mg d'un médicament est administrée à un patient. Chaque heure, l'organisme élimine 25 % de la quantité encore présente. On note $Q(x)$ la quantité, en mg, restant x heures après la prise.

- Déterminer le coefficient multiplicateur horaire, puis l'expression de $Q(x)$.
- Calculer $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$ et $Q(4)$.
- Le médicament est-il totalement éliminé au bout d'un temps fini ? Justifier avec la définition du cours.

Exercice 14 – Lire la courbe d’une exponentielle

La courbe ci-dessous est celle de la fonction f définie par $f(x) = 1,5^x$, tracée pour x compris entre -1 et 4 .

- Lire l’ordonnée du point de la courbe d’abscisse 0, puis celle du point d’abscisse 2.
- Vérifier la lecture de la question a) par le calcul.
- Lire une valeur approchée de l’abscisse du point d’ordonnée 4, puis encadrer cette abscisse par deux entiers consécutifs à l’aide de valeurs calculées.



La courbe de $f(x) = 1,5^x$: elle passe au-dessus de l'axe des abscisses sans jamais le toucher.

Exercice 15 – Synthèse : quatre questions sur la base 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$.

- Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$ et $f(10)$.
- Calculer $f(0,5)$, arrondi au millième, et donner sa valeur exacte.
- Calculer $f(-4)$ sous forme de fraction.
- Un nénuphar double sa surface chaque jour et couvre 1 m^2 le premier jour. Quelle surface couvre-t-il le onzième jour ? Combien de jours faut-il pour dépasser $1\,000 \text{ m}^2$?