

Plaquette 2 - Propriétés algébriques et équations

Fonction exponentielle — Première générale

Exercices

Méthode

Les cinq règles de calcul sur les exposants (q^{a+b} , q^{a-b} , q^{-a} , $(q^a)^b$, $(pq)^x$) ne servent pas seulement à simplifier : ce sont elles qui permettent de **résoudre** une équation exponentielle. La méthode est toujours la même : ramener les deux membres à la **même base**, puis identifier les exposants. Quand l'exposant cherché n'est pas un nombre simple — un seuil du type « à partir de quelle année dépasse-t-on le double ? » —, le logarithme n'est pas encore disponible : on répond par un **tableau de valeurs**, en justifiant par le sens de variation. Deux erreurs sont traquées dans toute la plaquette : additionner des puissances comme on les multiplie, et oublier que l'inégalité **change de sens** quand la base est inférieure à 1.

Exercice 1 - Écrire sous la forme d'une seule puissance

Écrire chaque expression sous la forme d'une seule puissance, puis donner sa valeur exacte lorsque c'est un nombre.

- a) $2^5 \times 2^3$
- b) $\frac{3^7}{3^4}$
- c) $(5^2)^3$
- d) $1,1^x \times 1,1^3$

Exercice 2 - Un quotient qui se simplifie complètement

Pour tout réel x , on pose

$$A(x) = \frac{1,04^x \times 1,04^2}{1,04^{x-1}}$$

- a) Simplifier $A(x)$ et montrer que A est une fonction constante.
- b) Donner la valeur exacte de cette constante.

Exercice 3 - Changer de base

Réécrire chaque expression comme une puissance de la base indiquée.

- a) 8^x avec la base 2
- b) 9^x avec la base 3
- c) $0,25^x$ avec la base 2
- d) Réciproquement, écrire 2^{3x} sous la forme q^x et donner q .

Exercice 4 - Deux bases pour un même exposant

- a) Démontrer que pour tout réel x , $2^x \times 3^x = 6^x$.
- b) En déduire une écriture simplifiée de $\frac{6^x}{2^x}$.
- c) Calculer $\frac{6^4}{2^4}$ de deux façons différentes.

Exercice 5 - Équations à base déjà commune

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

- a) $2^x = 2^5$
- b) $3^{x+1} = 3^4$
- c) $1,05^{2x} = 1,05^6$
- d) $0,9^{x-3} = 0,9$

Exercice 6 - Reconnaître une puissance entière du second membre

Résoudre les équations suivantes, en écrivant d'abord le second membre comme une puissance de la base du premier.

- a) $2^x = 8$
- b) $3^x = 81$
- c) $5^x = \frac{1}{25}$
- d) $10^x = 0,001$

Exercice 7 - Quand l'exposant est une expression de x

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous. On précisera à chaque fois la base commune choisie.

- a) $2^{x+1} = 16$
- b) $3^{2x} = 27$
- c) $4^x = 8$
- d) $10^{3x-1} = 100$

Exercice 8 - Un facteur devant la puissance

- a) Résoudre $5 \times 2^x = 160$.
- b) Résoudre $250 \times 1,2^x = 432$.
- c) Expliquer pourquoi il faut commencer par isoler la puissance avant d'identifier les exposants.

Exercice 9 - Une inconnue dans les deux exposants

Résoudre les équations suivantes, dans lesquelles x figure des deux côtés du signe égal.

a) $2^{3x} = 2^{x+4}$

b) $1,1^{2x-1} = 1,1^{x+2}$

Exercice 10 - Inéquations : attention au sens de la base

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $1,5^x > 1,5^4$

b) $0,8^x \geq 0,8^3$

c) $2^x < 32$

d) $0,5^x > 0,25$

Exercice 11 - Simplifier une expression littérale

Soit q un réel strictement positif. Simplifier, pour tout réel x , l'expression

$$B(x) = \frac{q^{x+1} \times q^{2-x}}{q^2}$$

Exercice 12 - Démontrer la propriété du coefficient multiplicateur

Soit $V_0 > 0$, $q > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = V_0 \times q^x$.

a) Démontrer que $f(x+1) = q \times f(x)$ pour tout réel x .

b) Démontrer de même que $f(x+2) = q^2 \times f(x)$.

c) Interpréter la question a) dans le cas $q = 1,03$: que signifie concrètement l'égalité obtenue ?

Exercice 13 - Vrai ou faux sur les règles de calcul

Dire si chaque égalité est vraie pour tout réel x , en justifiant. Quand elle est fausse, donner l'écriture correcte et un contre-exemple.

a) $2^x + 2^x = 2^{2x}$

b) $(2^x)^2 = 2^{x^2}$

c) $2^x \times 3^x = 6^x$

d) $\frac{2^x}{2} = 2^{x-1}$

Exercice 14 - Chercher un seuil par tableau de valeurs

Un placement rapporte 4 % par an : un capital initial est multiplié par $1,04^x$ au bout de x années. On cherche à partir de quelle année le capital a **doublé**, c'est-à-dire pour quel entier x on a $1,04^x \geq 2$.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, les valeurs étant arrondies au dix-millième.

x	15	16	17	18	19
$1,04^x$	?	?	?	?	?

b) En déduire le plus petit entier x tel que $1,04^x \geq 2$.

c) Justifier que ce résultat vaut aussi pour tous les entiers plus grands.

Exercice 15 – Synthèse : une dose qui passe sous un seuil

Un patient reçoit 500 mg d'un principe actif. Chaque heure, l'organisme élimine 15 % de la quantité présente. On note $Q(x)$ la quantité restante, en mg, au bout de x heures.

a) Donner l'expression de $Q(x)$.

b) Démontrer que $Q(x + 1) = 0,85 \times Q(x)$ pour tout réel x .

c) Résoudre l'équation $Q(x) = 500 \times 0,85^4$ et interpréter.

d) Le traitement redevient inefficace quand la quantité passe sous 100 mg. À l'aide du tableau ci-dessous, déterminer au bout de combien d'heures entières cela se produit.

x	8	9	10	11
$0,85^x$	0,2725	0,2316	0,1969	0,1673