

Plaquette 5 – Synthèse : modéliser avec une exponentielle

Fonction exponentielle — Première générale

Exercices

Méthode

Cette dernière plaquette part de situations concrètes et demande le travail complet : **choisir** le modèle (exponentiel ou affine, en regardant si ce sont les différences ou les quotients qui sont constants), **l'ajuster** aux données (trouver V_0 et q), **l'exploiter** (calculer une valeur, un taux global, un taux moyen, un seuil), puis **le critiquer** — un modèle exponentiel n'est jamais valable indéfiniment. Les énoncés sont ceux du bac : plusieurs questions enchaînées, des données à lire dans un tableau ou sur un graphique, et une dernière question de recul sur la validité du modèle. Toutes les techniques des quatre plaquettes précédentes y sont convoquées.

Exercice 1 – Choisir entre deux modèles

Deux grandeurs sont relevées pendant cinq ans.

Année	0	1	2	3	4
Grandeur U	800	760	722	686	652
Grandeur W	800	760	720	680	640

- Pour chaque grandeur, calculer les différences puis les quotients de deux valeurs consécutives (arrondis au centième).
- En déduire, pour chacune, le modèle qui convient et son expression.
- Prévoir la valeur de chaque grandeur l'année 10, arrondie à l'unité. Commenter l'écart.

Exercice 2 – Ajuster un modèle sur deux valeurs

Le nombre d'inscrits à une plateforme est de 250 au lancement et de 366 quatre mois plus tard. On suppose que la croissance est exponentielle, de coefficient mensuel q .

- Écrire l'équation vérifiée par q , puis déterminer q (arrondi au centième).
- En déduire le taux mensuel de croissance et l'expression de $N(x)$.
- Estimer le nombre d'inscrits au bout de 8 mois, arrondi à l'unité.

Exercice 3 – Le café qui refroidit

Un café servi à 75 °C refroidit dans une pièce à 20 °C. Chaque minute, l'**écart** entre la température du café et celle de la pièce diminue de 20 %. On note $T(x)$ la température du café, en degrés, au bout de x minutes.

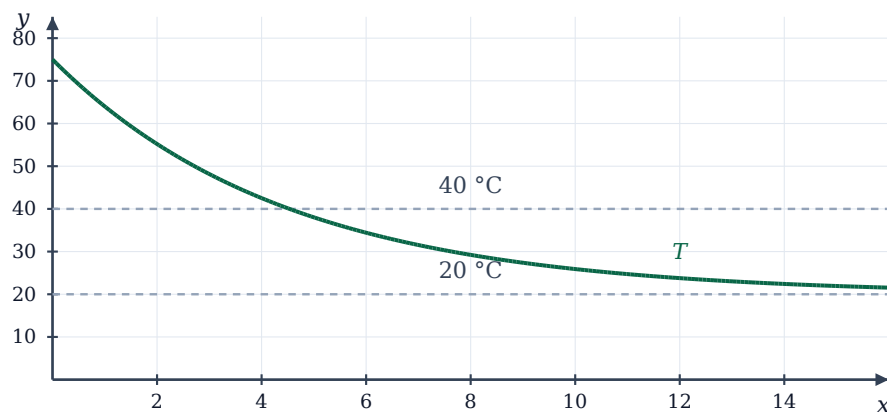
a) Justifier que $T(x) = 20 + 55 \times 0,8^x$.

b) Calculer $T(2)$ et $T(5)$, arrondies au dixième de degré.

c) À l'aide du tableau ci-dessous, déterminer au bout de combien de minutes entières le café est buvable, c'est-à-dire à moins de 40 °C.

x	3	4	5	6
$0,8^x$	0,5120	0,4096	0,3277	0,2621

d) D'après ce modèle, le café atteint-il un jour la température de la pièce ?



La température du café et les deux repères de 20 °C et 40 °C.

Exercice 4 – Une culture de bactéries qui double

Une culture contient 5 000 bactéries et leur nombre double toutes les 30 minutes. On note $N(t)$ le nombre de bactéries au bout de t heures.

a) Combien de doubléments se produisent en une heure ? En déduire le coefficient multiplicateur horaire.

b) Donner l'expression de $N(t)$ et calculer $N(3)$.

c) Calculer $N(1,5)$ et vérifier le résultat en comptant les doubléments.

d) Ce modèle peut-il rester valable pendant deux jours ? Justifier par un calcul.

Exercice 5 – Croissance d'une communauté en ligne

Une page compte 12 000 abonnés et en gagne 8 % par mois.

a) Donner l'expression du nombre $A(x)$ d'abonnés au bout de x mois, puis calculer $A(5)$, arrondi à l'unité.

b) Déterminer le taux global sur un semestre, arrondi à 0,01 %.

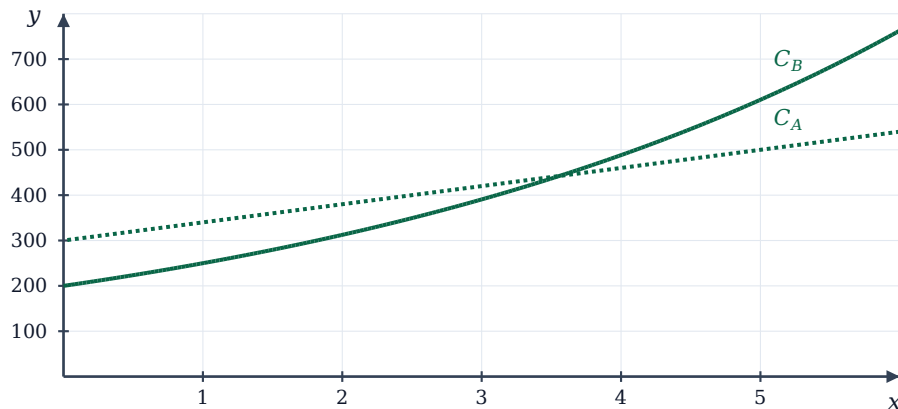
c) L'objectif est d'atteindre 20 000 abonnés. À l'aide des valeurs $1,08^6 \approx 1,5869$ et $1,08^7 \approx 1,7138$, déterminer le nombre de mois nécessaires.

Exercice 6 - Deux tarifs de location

Un loueur de matériel propose deux formules pour x mois de location :

- formule A : 300 € de frais fixes, puis 40 € par mois, soit un coût $C_A(x) = 300 + 40x$;
- formule B : un coût $C_B(x) = 200 \times 1,25^x$ euros.

- a) Calculer le coût des deux formules pour $x = 0$, $x = 3$ et $x = 4$.
- b) Déterminer, à l'aide du graphique et des calculs de a), à partir de quel mois la formule A devient la moins chère.
- c) Expliquer pourquoi la formule B finit toujours par coûter plus cher, quelles que soient les valeurs de départ.



Les coûts des deux formules, en euros, en fonction du nombre de mois.

Exercice 7 - Valeur de revente d'un véhicule

Un véhicule utilitaire acheté 32 000 € perd 18 % de sa valeur chaque année.

- a) Exprimer sa valeur $V(x)$ au bout de x années, puis calculer $V(3)$, arrondie à l'euro.
- b) Au bout de combien d'années entières la valeur devient-elle inférieure à la moitié du prix d'achat ? On donne $0,82^3 \approx 0,5514$ et $0,82^4 \approx 0,4521$.
- c) Calculer le taux d'évolution global sur 5 ans, arrondi à 0,01 %.

Exercice 8 - Du temps de demi-vie au taux annuel

Un isotope radioactif a une **demi-vie** de 30 ans : la masse restante est divisée par 2 tous les 30 ans. On part d'une masse de 240 g.

- a) Écrire l'équation vérifiée par le coefficient annuel q , puis calculer q (arrondi au millionième).
- b) En déduire le pourcentage de masse perdue chaque année, arrondi à 0,01 %.
- c) Calculer la masse restante au bout de 100 ans, arrondie au gramme, de deux façons.

Exercice 9 - Les débuts d'une épidémie

Au début d'une épidémie, le nombre de cas hebdomadaires est multiplié par 1,4 chaque semaine. On compte 120 cas la première semaine (semaine 0).

- a) Donner l'expression du nombre de cas $C(x)$ en semaine x , et calculer $C(4)$, arrondi

à l'unité.

b) Calculer le taux d'évolution hebdomadaire, puis le taux global sur 4 semaines, arrondi à 0,01 %.

c) Le modèle prévoit-il un nombre de cas supérieur à la population du pays (68 millions) au bout d'un an ? On donne $1,4^{52} \approx 3,97 \times 10^7$.

d) Expliquer pourquoi, en pratique, la courbe des cas finit toujours par s'écarter de ce modèle.

Exercice 10 – Prix de l'immobilier et taux moyen

Le prix moyen d'un logement dans une ville est passé de 180 000 € à 300 000 € en 20 ans.

a) Calculer le coefficient global, puis le taux d'évolution global, arrondi à 0,01 %.

b) Déterminer le taux annuel moyen, arrondi à 0,01 %.

c) Si cette évolution moyenne se poursuivait, quel serait le prix dans 10 ans, arrondi au millier d'euros ?

Exercice 11 – Les effectifs d'un club de sport

Le diagramme ci-dessous donne le nombre de licenciés d'un club pour cinq saisons consécutives.

a) Ces effectifs suivent-ils un modèle exponentiel ? Justifier par le calcul des quotients, arrondis au centième.

b) Donner le modèle $L(x)$, où x est le nombre de saisons écoulées depuis la saison 1, puis le taux annuel.

c) Le gymnase ne peut accueillir que 400 licenciés. Déterminer la saison où cette limite sera atteinte, à l'aide des valeurs $1,15^5 \approx 2,0114$ et $1,15^6 \approx 2,3131$.



Nombre de licenciés du club, saison par saison.

Exercice 12 – Garantie d'un panneau solaire

Un panneau photovoltaïque produit 100 % de sa puissance nominale à l'installation et perd 0,5 % de rendement par an. Le fabricant garantit un rendement d'au moins 85 % de la puissance initiale au bout de 25 ans.

a) Exprimer le rendement $R(x)$, en pourcentage de la puissance initiale, au bout de x

années.

b) Calculer $R(25)$, arrondi à 0,01 %. La garantie est-elle tenue ?

c) Au bout de combien d'années entières le rendement passe-t-il sous 85 % ? On donne $0,995^{32} \approx 0,8518$ et $0,995^{33} \approx 0,8475$.

Exercice 13 – Intérêts simples ou composés

Un capital de 1 000 € est placé pendant 10 ans à 5 % par an. Deux contrats sont possibles :

- intérêts **simples** : chaque année, 5 % du capital **initial** sont versés ;
- intérêts **composés** : chaque année, 5 % du capital **acquis** sont versés.

a) Donner l'expression du capital au bout de x années dans chacun des deux cas, et préciser la nature de chaque fonction.

b) Comparer les capitaux au bout de 10 ans, arrondis au centime.

c) Au bout de combien d'années entières l'écart entre les deux contrats dépasse-t-il 100 € ? On donne $1,05^7 \approx 1,4071$ et $1,05^8 \approx 1,4775$.

Exercice 14 – Deux villes, deux dynamiques

En 2015, la ville A comptait 60 000 habitants et la ville B, 75 000. Depuis, la population de A augmente de 2,5 % par an et celle de B diminue de 1 % par an.

a) Exprimer les populations $P_A(x)$ et $P_B(x)$, x années après 2015.

b) Calculer les deux populations en 2025, arrondies à l'habitant.

c) À l'aide du tableau ci-dessous, déterminer l'année où la population de A dépasse celle de B.

x	6	7	8
$1,025^x$	1,1597	1,1887	1,2184
$0,99^x$	0,9415	0,9321	0,9227

Exercice 15 – Synthèse : la consommation d'un centre de données

Un centre de données consommait 18 GWh en 2020. Sa consommation augmente de 11 % par an, tandis que l'efficacité de ses machines fait baisser de 4 % par an la consommation par calcul.

a) Exprimer la consommation $E(x)$, en GWh, x années après 2020, puis calculer $E(6)$, arrondie au dixième.

b) Calculer le taux d'évolution global de la consommation entre 2020 et 2026, arrondi à 0,01 %.

c) L'exploitant doit rester sous 45 GWh. À l'aide des valeurs $1,11^8 \approx 2,3045$ et $1,11^9 \approx 2,5580$, déterminer la dernière année où le plafond est respecté.

d) Le nombre de calculs effectués, lui, est multiplié par $\frac{1,11}{0,96}$ chaque année. Calculer le taux annuel correspondant, arrondi à 0,01 %, et interpréter.

e) Peut-on utiliser ce modèle pour estimer la consommation en 2070 ? Justifier.