

Plaquette 3 – Variations et lectures graphiques

Fonction exponentielle — Première générale

Exercices

Méthode

Toute l'allure d'une courbe d'exponentielle tient dans **un seul nombre** : la base. Si $q > 1$ la courbe monte, si $0 < q < 1$ elle descend, et dans les deux cas elle passe par le point $(0 ; 1)$ et reste **au-dessus** de l'axe des abscisses, dont elle se rapproche sans jamais le toucher. Cette plaquette fait le tour de ces lectures : déterminer le sens de variation sans calcul, dresser un tableau de variations, comparer deux puissances de même base, reconnaître quelle courbe va avec quelle base, résoudre graphiquement une équation ou une inéquation, et encadrer une solution par balayage. On y voit aussi, sur un graphique, pourquoi une croissance exponentielle finit toujours par rattraper une croissance affine, même quand elle démarre plus lentement.

Exercice 1 – Croissante ou décroissante ?

Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, préciser le sens de variation en justifiant par la valeur de la base.

- a) $f(x) = 1,15^x$
- b) $g(x) = 0,95^x$
- c) $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- d) $k(x) = 1,001^x$

Exercice 2 – Dresser un tableau de variations

Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par $f(x) = 1,8^x$.

- a) Calculer $f(-3)$ et $f(3)$, la première valeur arrondie au dix-millième.
- b) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3 ; 3]$.
- c) En déduire le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.

Exercice 3 – Comparer sans calculatrice

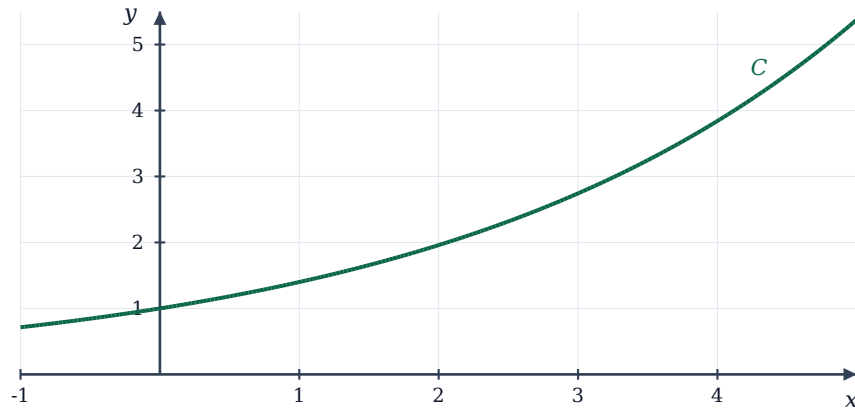
Comparer les deux nombres de chaque couple, en justifiant uniquement par le sens de variation de la fonction exponentielle concernée.

- a) $1,3^5$ et $1,3^7$
- b) $0,7^4$ et $0,7^6$
- c) $1,2^{-3}$ et $1,2^{-1}$
- d) $0,9^{-2}$ et $0,9^2$

Exercice 4 – Lire une courbe point par point

Ci-dessous la courbe C de la fonction f définie par $f(x) = 1,4^x$.

- Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(2)$, puis contrôler par le calcul.
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$, en donnant une valeur approchée de la solution.
- Justifier par le calcul que cette solution est comprise entre 2 et 3.

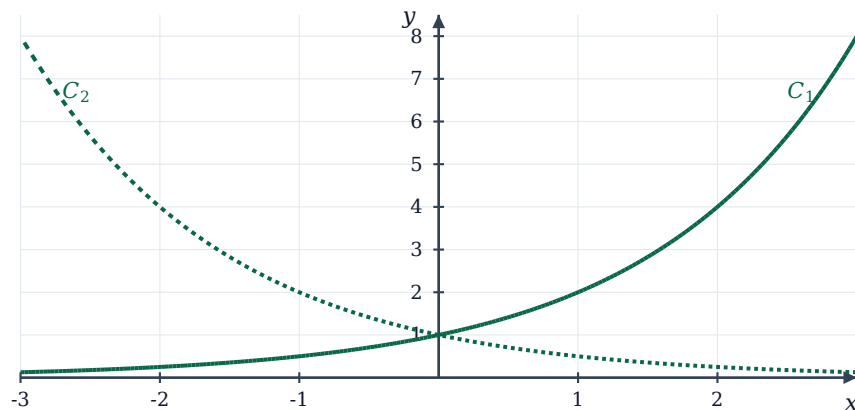


La courbe de $f(x) = 1,4^x$.

Exercice 5 – Deux bases inverses sur un même repère

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes des fonctions u et v définies par $u(x) = 2^x$ et $v(x) = 0,5^x$.

- Attribuer chaque courbe à sa fonction, en justifiant.
- Calculer $u(3)$ et $v(-3)$. Que remarque-t-on ?
- Démontrer que $v(x) = u(-x)$ pour tout réel x , et en déduire la transformation géométrique qui envoie une courbe sur l'autre.

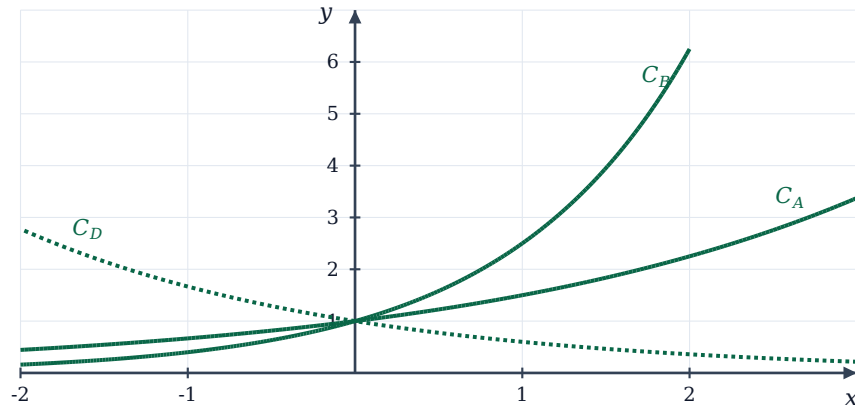


Les courbes de 2^x (trait plein) et de $0,5^x$ (pointillés).

Exercice 6 – Associer chaque courbe à sa base

Trois courbes sont tracées ci-dessous. Elles correspondent, dans un ordre inconnu, aux fonctions définies par $1,5^x$, $2,5^x$ et $0,6^x$.

- Quelle courbe correspond à $0,6^x$? Justifier sans calcul.
- Départager les deux courbes croissantes en calculant l'image de 2 par chacune des deux fonctions.
- Pourquoi les trois courbes se coupent-elles toutes au même point ? Donner ses coordonnées.

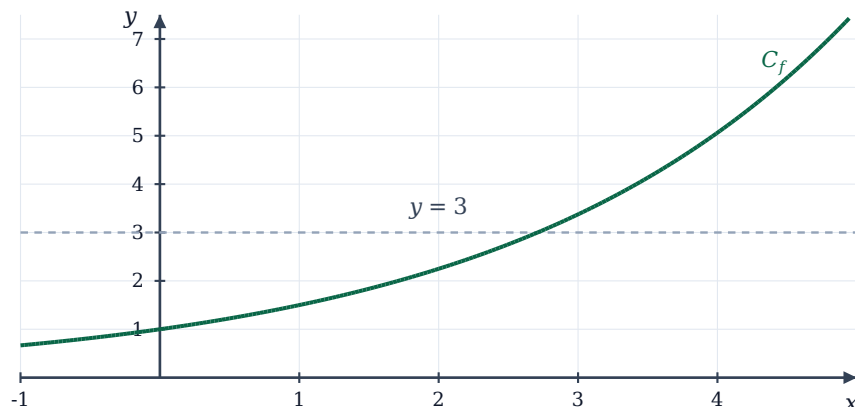


Trois exponentielles dans un même repère.

Exercice 7 – Résoudre une inéquation graphiquement

Le graphique ci-dessous donne la courbe de $f(x) = 1,5^x$ et la droite d'équation $y = 3$.

- Déterminer graphiquement l'ensemble des réels x tels que $f(x) \geq 3$.
- Encadrer par deux entiers consécutifs la solution de l'équation $f(x) = 3$.
- Un élève répond « $x \geq 3$ ». Expliquer son erreur.



La courbe de $1,5^x$ et la droite d'équation $y = 3$.

Exercice 8 – Une courbe qui ne coupe jamais l'axe

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,9^x$.

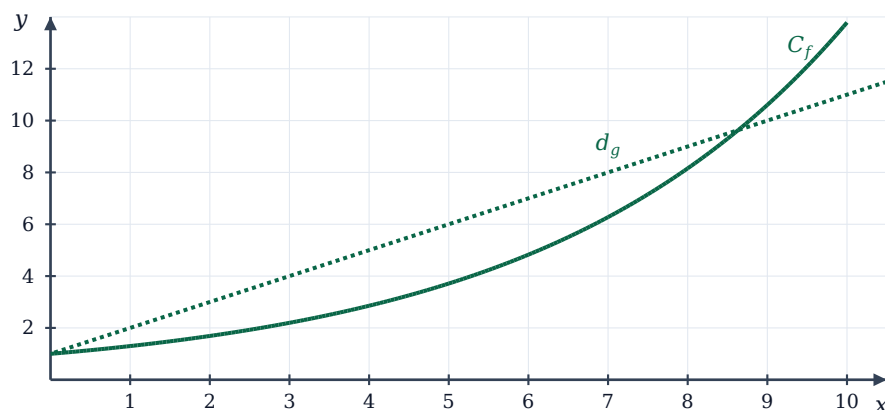
- Calculer $f(50)$ et $f(100)$, en écriture scientifique arrondie à trois chiffres significatifs.

- b) L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle des solutions ? Justifier par une propriété du cours.
 c) Comment décrire alors le comportement de la courbe quand x devient très grand ?

Exercice 9 - L'exponentielle rattrape l'afine

On considère $f(x) = 1,3^x$ et $g(x) = x + 1$, représentées ci-dessous pour x compris entre 0 et 10.

- a) Comparer $f(1)$ et $g(1)$, puis $f(5)$ et $g(5)$ (valeurs arrondies au centième). Laquelle des deux fonctions est en avance ?
 b) Calculer $f(8)$, $f(9)$, $g(8)$ et $g(9)$, puis déterminer le premier entier pour lequel f dépasse g .
 c) Que se passe-t-il ensuite ? Justifier par la nature des deux fonctions.



L'exponentielle $1,3^x$ (trait plein) et la droite $y = x + 1$ (pointillés).

Exercice 10 - Extremums d'une exponentielle décroissante

Soit g la fonction définie sur $[0 ; 10]$ par $g(x) = 0,85^x$.

- a) Justifier le sens de variation de g sur $[0 ; 10]$.
 b) En déduire, sans calculatrice pour le premier, le maximum et le minimum de g sur $[0 ; 10]$ (le second arrondi au millièmè).
 c) Pour tout x de $[0 ; 10]$, encadrer $g(x)$.

Exercice 11 - Une croissance de plus en plus rapide

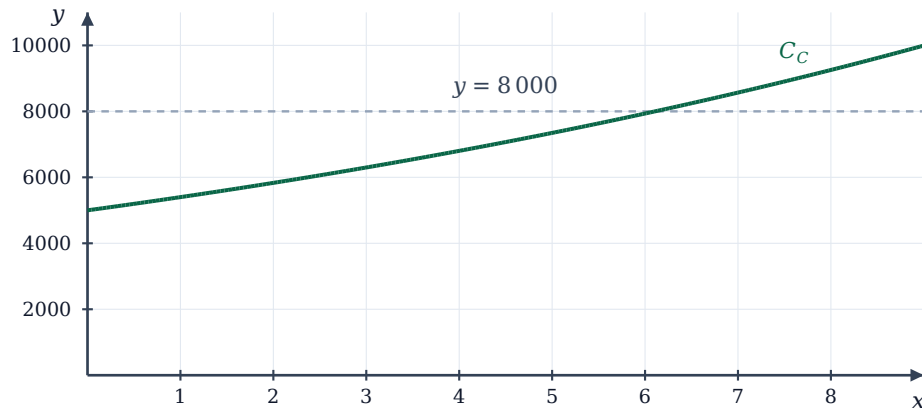
Soit $f(x) = 1,2^x$.

- a) Calculer $f(1) - f(0)$.
 b) Calculer $f(5) - f(4)$ (valeurs exactes).
 c) Les deux écarts correspondent tous les deux à une augmentation de x d'une unité. Pourquoi ne sont-ils pas égaux, alors que le taux d'évolution est constant ?

Exercice 12 - Lire un seuil sur le graphique d'un placement

Un capital de 5 000 € est placé à 8 % par an. Le graphique ci-dessous représente le capital $C(x) = 5\,000 \times 1,08^x$, en euros, au bout de x années, ainsi que la droite d'équation $y = 8\,000$.

- Lire graphiquement le capital au bout de 5 ans, puis contrôler par le calcul (arrondi à l'euro).
- Déterminer graphiquement au bout de combien d'années entières le capital dépasse le seuil tracé.
- Confirmer la réponse de la question b) par deux calculs.



Le capital $C(x) = 5\,000 \times 1,08^x$ et le seuil de 8 000 €.

Exercice 13 - Encadrer une solution par balayage

On cherche à résoudre l'équation $1,6^x = 5$.

- Justifier que cette équation a une unique solution, puis l'encadrer par deux entiers consécutifs.
- Affiner l'encadrement au dixième, à l'aide des valeurs $1,6^{3,4} \approx 4,9432$ et $1,6^{3,5} \approx 5,1811$.
- Pourquoi ne peut-on pas donner la valeur exacte de cette solution avec les outils de Première générale ?

Exercice 14 - Placer des points et tracer la courbe

Soit f définie par $f(x) = 1,25^x$.

- Recopier et compléter le tableau de valeurs, les résultats étant arrondis au centième.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?

- Placer les sept points obtenus dans un repère, puis tracer la courbe de f sur $[-2; 4]$.
- La courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Et l'axe des ordonnées ?

Exercice 15 – Synthèse : étude d’une décroissance

Une pièce mécanique perd 25 % de sa valeur chaque année. Sa valeur initiale est de 12 000 €. On note $V(x) = 12\,000 \times 0,75^x$ sa valeur, en euros, au bout de x années.

- a) Justifier le sens de variation de V sur $[0 ; +\infty[$.
- b) Calculer $V(2)$ et $V(5)$, arrondis à l’euro.
- c) À l’aide du tableau ci-dessous, déterminer au bout de combien d’années entières la valeur passe sous 3 000 €.

x	3	4	5	6
$0,75^x$	0,4219	0,3164	0,2373	0,1780

- d) La pièce finira-t-elle par avoir une valeur nulle d’après ce modèle ? Qu’en penser ?