

Plaquette 2 - Forme canonique, sommet et variations

Fonctions polynômes du second degré — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Forme canonique, sommet et sens de variation.

- **Forme canonique.** Tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrit de manière unique

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

- **Sommet.** La courbe de f est une parabole de sommet

$$S(\alpha; \beta)$$

et son **axe de symétrie** est la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

- **Extremum.** Il dépend du signe de a :

$$a > 0: \beta \text{ est le minimum de } f \quad a < 0: \beta \text{ est le maximum de } f$$

- **Variations.** Si $a > 0$, f est décroissante sur $] -\infty; \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha; +\infty[$. Si $a < 0$, c'est l'inverse.

- **Méthode du carré** (sans la formule) : on complète $x^2 + bx$ en un carré, par exemple

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$$

On retire toujours le carré du demi-coefficient de x .

- **Symétrie.** Deux abscisses symétriques par rapport à α ont la même image : $f(\alpha - h) = f(\alpha + h)$.

- **Contrôle systématique.** Lorsque le trinôme a deux racines, α en est la **moyenne**. Et β doit toujours être vérifié en recalculant $f(\alpha)$ avec la forme développée.

Correction de l'exercice 1 - Lire le sommet sur une forme canonique

On compare chaque expression à la forme de référence :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{de sommet } S(\alpha; \beta)$$

a) $a = 1$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$: sommet $S(4; 3)$. Comme $a > 0$, f admet un **minimum** égal à 3, atteint en $x = 4$.

b) Attention au signe de α : $(x + 1)^2 = (x - (-1))^2$, donc $\alpha = -1$ et $\beta = 7$: sommet $S(-1; 7)$. Comme $a = -2 < 0$, g admet un **maximum** égal à 7.

c) Ici $\beta = 0$: sommet $S(2; 0)$. Comme $a = 3 > 0$, h admet un **minimum** égal à 0 — la parabole touche l'axe des abscisses en son sommet, 2 est une racine double.

d) On réécrit dans l'ordre habituel : $k(x) = -(x - 6)^2 + 5$, donc $a = -1$, $\alpha = 6$ et $\beta = 5$: sommet $S(6; 5)$ et **maximum** égal à 5.

Les deux pièges. Le signe de α (un + dans la parenthèse donne un α négatif), et l'ordre des termes : il faut repérer le carré avant de lire β .

Réponse. a) $S(4; 3)$, minimum 3 — b) $S(-1; 7)$, maximum 7 — c) $S(2; 0)$, minimum 0 — d) $S(6; 5)$, maximum 5.

Correction de l'exercice 2 - Calculer les coordonnées du sommet

On applique la formule du cours pour l'abscisse, puis on calcule l'image pour l'ordonnée :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

a) $a = 1$ et $b = -6$, donc $\alpha = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3$. Puis $\beta = f(3) = 9 - 18 + 1 = -8$. Sommet $S(3; -8)$.

b) $a = 2$ et $b = 4$, donc $\alpha = -\frac{4}{4} = -1$. Puis

$$\beta = g(-1) = 2 \times 1 + 4 \times (-1) - 3 = 2 - 4 - 3 = -5$$

Sommet $S(-1; -5)$.

c) $a = -3$ et $b = 12$, donc $\alpha = -\frac{12}{2 \times (-3)} = -\frac{12}{-6} = 2$. Puis $\beta = h(2) = -12 + 24 = 12$.

Sommet $S(2; 12)$.

Le piège du double signe. Dans la formule $\alpha = -\frac{b}{2a}$, il y a le signe de la formule **et** le signe de b : avec $b = -6$, on obtient $\alpha = +3$. Écrire $\alpha = -3$ est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Le contrôle. À la question c), les racines de $-3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$ sont 0 et 4, dont la moyenne vaut bien 2 ✓

Réponse. a) $S(3; -8)$ — b) $S(-1; -5)$ — c) $S(2; 12)$.

Correction de l'exercice 3 - Mettre sous forme canonique

a) On identifie $a = 1$, $b = -8$ et $c = 11$, puis on applique les formules :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4$$

$$\beta = f(4) = 16 - 32 + 11 = -5$$

La forme canonique est donc

$$f(x) = (x - 4)^2 - 5$$

b) On développe pour contrôler :

$$(x - 4)^2 - 5 = x^2 - 8x + 16 - 5 = x^2 - 8x + 11 = f(x)$$

L'égalité est vérifiée pour tout réel x : la forme canonique est correcte.

c) Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut et β est le **minimum** : f admet pour minimum -5 , atteint en $x = 4$.

Pourquoi c'est vrai. Pour tout réel x , $(x - 4)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq -5$, avec égalité seulement quand $(x - 4)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 4$. La forme canonique **démontre** l'extremum, elle ne fait pas que le suggérer.

Réponse. a) $f(x) = (x - 4)^2 - 5$ — b) le développement redonne $x^2 - 8x + 11$ — c) minimum -5 atteint en $x = 4$.

Correction de l'exercice 4 - Forme canonique avec un coefficient a différent de 1

a) Avec $a = 2$ et $b = 12$:

$$\alpha = -\frac{12}{2 \times 2} = -\frac{12}{4} = -3$$

$$\beta = g(-3) = 2 \times 9 + 12 \times (-3) + 7 = 18 - 36 + 7 = -11$$

La forme canonique s'écrit donc, **en conservant le coefficient $a = 2$ devant le carré** :

$$g(x) = 2(x + 3)^2 - 11$$

b) Développement de contrôle :

$$2(x + 3)^2 - 11 = 2(x^2 + 6x + 9) - 11 = 2x^2 + 12x + 18 - 11 = 2x^2 + 12x + 7$$

On retrouve bien $g(x)$.

c) Le sommet est $S(-3; -11)$. Comme $a = 2 > 0$, g admet un **minimum** égal à -11 , atteint en $x = -3$.

L'erreur à ne pas faire. Oublier le 2 devant le carré et écrire $(x + 3)^2 - 11$: en développant, on obtiendrait $x^2 + 6x - 2$, qui n'est pas $g(x)$. Le coefficient a est **le même** dans les trois formes d'écriture.

Réponse. a) $g(x) = 2(x + 3)^2 - 11$ — b) le développement redonne $2x^2 + 12x + 7$ — c) $S(-3; -11)$, minimum -11 .

Correction de l'exercice 5 - La méthode du carré, sans formule

Le principe : on écrit le carré du **demi-coefficient** de x , puis on corrige l'excédent.

a) On développe le carré proposé : $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Il y a donc 9 de trop, qu'il faut retirer :

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$$

b) $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$. On a donc $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25$, puis on ajoute le $+2$ de l'énoncé :

$$x^2 - 10x + 2 = (x - 5)^2 - 25 + 2 = (x - 5)^2 - 23$$

c) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, donc $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ et

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 1)^2 - 1 - 8 = (x + 1)^2 - 9$$

Le contrôle immédiat. On peut vérifier avec la formule : pour c), $\alpha = -\frac{2}{2} = -1$ et $\beta = f(-1) = 1 - 2 - 8 = -9$ ✓ Les deux méthodes donnent le même résultat, et cette seconde méthode explique **pourquoi** la formule fonctionne.

Le bonus de la question c). La forme obtenue, $(x + 1)^2 - 9$, est une différence de carrés : elle se factorise en $(x + 1 - 3)(x + 1 + 3) = (x - 2)(x + 4)$. La forme canonique mène donc aussi aux racines.

Réponse. a) -9 — b) -23 — c) -9 .

Correction de l'exercice 6 - Tableau de variations avec a positif

a) Avec $a = 1$ et $b = -4$:

$$\alpha = -\frac{-4}{2} = 2 \quad \beta = f(2) = 4 - 8 - 1 = -5$$

Le sommet est $S(2; -5)$.

b) Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut : la fonction **décroît** jusqu'au sommet, puis **croît**.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		décroissante	-5	croissante	

Autrement dit : f est décroissante sur $] -\infty ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$.

c) Le minimum de f étant -5, on a pour tout réel x :

$$f(x) \geq -5$$

avec égalité uniquement en $x = 2$. La forme canonique $f(x) = (x - 2)^2 - 5$ le démontre : un carré est toujours positif ou nul.

À quoi sert ce type de conclusion. Elle permet de répondre sans calcul à des questions comme « l'équation $f(x) = -8$ a-t-elle des solutions ? » — non, puisque $-8 < -5$.

Réponse. a) $S(2 ; -5)$ — b) décroissante sur $] -\infty ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$ — c) $f(x) \geq -5$ pour tout réel x .

Correction de l'exercice 7 - Tableau de variations avec a négatif

a) Avec $a = -1$ et $b = 6$:

$$\alpha = -\frac{6}{2 \times (-1)} = -\frac{6}{-2} = 3 \quad \beta = g(3) = -9 + 18 - 4 = 5$$

Le sommet est $S(3 ; 5)$. Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas : g admet un **maximum** égal à 5, atteint en $x = 3$.

b) Le sens est inversé par rapport au cas $a > 0$: la fonction **croît** jusqu'au sommet puis **décroît**.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
g		croissante	5	décroissante	

c) Non. Le maximum de g vaut 5, donc pour tout réel x :

$$g(x) \leq 5 < 8$$

La fonction ne prend jamais la valeur 8 : l'équation $g(x) = 8$ n'a **aucune** solution. Graphiquement, la droite d'équation $y = 8$ passe entièrement au-dessus de la parabole.

Le réflexe. Avant de résoudre une équation du second degré, un coup d'œil à l'extremum suffit parfois à conclure — et évite un calcul de discriminant inutile.

Réponse. a) $S(3 ; 5)$, maximum 5 — b) croissante sur $] -\infty ; 3]$, décroissante sur $[3 ; +\infty[$ — c) non, car $g(x) \leq 5 < 8$.

Correction de l'exercice 8 - Minimum ou maximum ?

Le **signe de a** répond à la première question, puis les formules donnent la valeur.

$$a > 0 \Rightarrow \text{minimum} \quad a < 0 \Rightarrow \text{maximum} \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = f(\alpha)$$

a) $a = 4 > 0$: **minimum**. $\alpha = -\frac{-8}{8} = 1$ et $\beta = f(1) = 4 - 8 + 1 = -3$. Minimum -3 atteint en $x = 1$.

b) $a = -0,5 < 0$: **maximum**. $\alpha = -\frac{3}{2 \times (-0,5)} = -\frac{3}{-1} = 3$ et

$$\beta = g(3) = -0,5 \times 9 + 9 = -4,5 + 9 = 4,5$$

Maximum 4,5 atteint en $x = 3$.

c) $a = -1 < 0$: **maximum**. $\alpha = -\frac{-2}{-2} = -1$ et $\beta = h(-1) = -1 + 2 + 5 = 6$. Maximum 6 atteint en $x = -1$.

Ce qu'il faut avoir compris. Le signe de a décide de la forme de la parabole, donc de la nature de l'extremum ; il ne dit rien en revanche de l'endroit où celui-ci se trouve. Les deux informations sont indépendantes.

Réponse. a) minimum -3 en $x = 1$ — b) maximum $4,5$ en $x = 3$ — c) maximum 6 en $x = -1$.

Correction de l'exercice 9 - Comparer des images grâce aux variations

a) Avec $a = 1$ et $b = -6$, l'abscisse du sommet est

$$\alpha = -\frac{-6}{2} = 3$$

Comme $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty ; 3]$ et croissante sur $[3 ; +\infty[$.

b) Les deux nombres 0 et 2 appartiennent à $]-\infty ; 3]$, intervalle sur lequel f **décroît**. Comme $0 < 2$, les images sont dans l'ordre inverse : $f(0) > f(2)$.

c) Les nombres 4 et 7 appartiennent à $[3 ; +\infty[$, où f **croît**. Comme $4 < 7$, on a $f(4) < f(7)$.

d) Ici les deux nombres sont de part et d'autre du sommet : les variations ne permettent pas de conclure directement. On utilise la **symétrie** de la parabole autour de $x = 3$:

$$\frac{1+5}{2} = 3$$

Les abscisses 1 et 5 sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole, donc $f(1) = f(5)$. Contrôle : $f(1) = 1 - 6 + 2 = -3$ et $f(5) = 25 - 30 + 2 = -3$ ✓

La méthode générale. Comparer deux images se fait par les variations **si les deux abscisses sont du même côté du sommet**, et par la symétrie sinon. Sans cette précaution, on conclut à l'envers une fois sur deux.

Réponse. a) $\alpha = 3$, décroissante puis croissante — b) $f(0) > f(2)$ — c) $f(4) < f(7)$ — d) $f(1) = f(5) = -3$, par symétrie.

Correction de l'exercice 10 - Retrouver un trinôme à partir de son sommet

a) Le sommet donne directement α et β dans la forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = a(x - 1)^2 - 4$$

Il ne manque que le coefficient a , que le sommet seul ne permet pas de connaître (une infinité de paraboles ont le même sommet).

b) Le point $A(3 ; 0)$ appartient à la courbe, donc $f(3) = 0$:

$$a(3 - 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

D'où $f(x) = (x - 1)^2 - 4$.

c) On développe pour obtenir la forme développée :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

Pour les racines, la forme canonique est une différence de carrés :

$$(x - 1)^2 - 4 = (x - 1)^2 - 2^2 = (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1)$$

Les racines sont donc 3 et -1 . Contrôle par la symétrie : leur moyenne vaut

$$\frac{3 + (-1)}{2} = 1 = \alpha \quad \checkmark$$

Ce que l'exercice illustre. Deux informations suffisent à déterminer une parabole : le sommet (deux nombres) et un point (le troisième). C'est la question type des problèmes de modélisation.

Réponse. a) $f(x) = a(x - 1)^2 - 4$ — b) $a = 1$ — c) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, racines 3 et -1.

Correction de l'exercice 11 - L'enclos contre un mur

a) Le grillage couvre deux côtés de longueur x et le côté parallèle au mur, de longueur y :

$$2x + y = 60 \Leftrightarrow y = 60 - 2x$$

Pour que l'enclos existe, il faut $x > 0$ et $y > 0$, donc $60 - 2x > 0$, soit $x < 30$. Les valeurs possibles sont $0 < x < 30$.

b) L'aire est le produit des deux dimensions :

$$A(x) = x \times y = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2 = -2x^2 + 60x$$

c) C'est un trinôme avec $a = -2 < 0$: il admet donc un **maximum**, atteint au sommet.

$$\alpha = -\frac{60}{2 \times (-2)} = -\frac{60}{-4} = 15$$

$$\beta = A(15) = -2 \times 225 + 900 = -450 + 900 = 450$$

L'aire maximale est donc de 450 m², atteinte pour $x = 15$ m. Le côté parallèle au mur mesure alors $y = 60 - 2 \times 15 = 30$ m : l'enclos optimal est un rectangle de 15 m sur 30 m.

Le résultat à remarquer. Contrairement au cas sans mur (où l'optimum est un carré), l'enclos optimal adossé à un mur est **deux fois plus long que large**. Le mur « offre » un côté gratuit, ce qui déplace l'optimum.

Réponse. a) $y = 60 - 2x$ avec $0 < x < 30$ — b) $A(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$ — c) 15 m sur 30 m, pour une aire maximale de 450 m².

Correction de l'exercice 12 - La trajectoire d'un ballon

a) Au moment de la frappe, $t = 0$:

$$h(0) = -5 \times 0 + 20 \times 0 + 1 = 1 \text{ m}$$

Le ballon part donc d'une hauteur de 1 m — le pied du joueur n'est pas au niveau du sol.

b) Le coefficient $a = -5$ est négatif : la trajectoire est une parabole tournée vers le bas, et la hauteur maximale est atteinte au sommet.

$$\alpha = -\frac{20}{2 \times (-5)} = -\frac{20}{-10} = 2$$

$$\beta = h(2) = -5 \times 4 + 40 + 1 = -20 + 41 = 21$$

Le ballon atteint donc sa hauteur maximale de 21 m au bout de 2 secondes.

c) Non. La hauteur maximale étant 21 m, on a $h(t) \leq 21 < 22$ pour tout instant t : le ballon ne dépasse jamais 22 m. Le graphique le confirme, la droite d'équation $y = 22$ passant au-dessus du sommet de la parabole.

La lecture physique du modèle. Le coefficient -5 vient de la pesanteur (la moitié de $g \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), le 20 est la vitesse verticale initiale en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, et le 1 la hauteur de départ. Le modèle n'est valable que jusqu'à la retombée au sol.

Réponse. a) 1 m — b) hauteur maximale 21 m au bout de 2 s — c) non, car $h(t) \leq 21 < 22$.

Correction de l'exercice 13 - Le bénéfice maximal d'un atelier

a) On calcule les deux valeurs :

$$- B(2) = -2 \times 4 + 48 - 40 = -8 + 8 = 0 ;$$

$$- B(10) = -2 \times 100 + 240 - 40 = -200 + 200 = 0.$$

Le bénéfice est **nul** pour ces deux quantités : ce sont les deux seuils de rentabilité.

b) Le coefficient $a = -2$ est négatif, donc le bénéfice admet un maximum, atteint au sommet :

$$\alpha = -\frac{24}{2 \times (-2)} = 6$$

$$\beta = B(6) = -2 \times 36 + 144 - 40 = -72 + 104 = 32$$

Le bénéfice maximal est de 32 centaines d'euros, soit 3 200 €, pour une production de 6 tonnes. On remarque que 6 est la moyenne des deux seuils trouvés en a).

c) On développe la forme proposée :

$$-2(q-2)(q-10) = -2(q^2 - 12q + 20) = -2q^2 + 24q - 40 = B(q)$$

Les nombres 2 et 10 sont donc les **racines** de B , c'est-à-dire les quantités pour lesquelles le bénéfice est nul : l'atelier est rentable **entre** 2 et 10 tonnes, et déficitaire en dehors de cet intervalle.

La lecture économique. En dessous de 2 tonnes, les coûts fixes ne sont pas couverts ; au-delà de 10 tonnes, les coûts croissent plus vite que la recette. L'optimum est au milieu.

Réponse. a) $B(2) = B(10) = 0$ — b) 6 tonnes pour un bénéfice maximal de 3 200 € — c) 2 et 10 sont les seuils de rentabilité.

Correction de l'exercice 14 - Lire un sommet sur une parabole

a) Le point le plus bas de la parabole a pour coordonnées $(2; -5)$: c'est le sommet, donc $\alpha = 2$ et $\beta = -5$. La forme canonique est

$$f(x) = a(x-2)^2 - 5$$

La parabole étant tournée vers le haut, on sait déjà que $a > 0$.

b) Le point $(0; -3)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = -3$:

$$a(0-2)^2 - 5 = -3 \Leftrightarrow 4a - 5 = -3 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = 0,5$$

D'où $f(x) = 0,5(x-2)^2 - 5$.

c) On développe :

$$f(x) = 0,5(x^2 - 4x + 4) - 5 = 0,5x^2 - 2x + 2 - 5 = 0,5x^2 - 2x - 3$$

Pour les racines, on résout $0,5(x-2)^2 = 5$, soit $(x-2)^2 = 10$, donc $x-2 = \pm\sqrt{10}$:

$$x_1 = 2 - \sqrt{10} \approx -1,16 \quad x_2 = 2 + \sqrt{10} \approx 5,16$$

Sur le graphique, la courbe coupe bien l'axe des abscisses un peu avant -1 et un peu après 5 ✓ Et la moyenne des racines vaut 2, l'abscisse du sommet ✓

La méthode de lecture. Sommet + un point = trinôme entièrement déterminé. Le point le plus commode à lire est presque toujours celui d'abscisse 0, sur l'axe des ordonnées.

Réponse. a) $S(2; -5)$ et $f(x) = a(x-2)^2 - 5$ — b) $a = 0,5$ — c) $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 3$, racines $2 \pm \sqrt{10} \approx -1,16$ et 5,16.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète d'un trinôme

a) Avec $a = 3$ et $b = -12$:

$$\alpha = -\frac{-12}{2 \times 3} = 2 \quad \beta = f(2) = 12 - 24 + 5 = -7$$

$$f(x) = 3(x - 2)^2 - 7$$

Contrôle : $3(x^2 - 4x + 4) - 7 = 3x^2 - 12x + 12 - 7 = 3x^2 - 12x + 5 \checkmark$

b) Comme $a = 3 > 0$, la fonction décroît puis croît, avec un minimum au sommet.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		décroissante	-7	croissante	

Le minimum de f est -7 , atteint en $x = 2$.

c) On résout l'équation avec la forme développée, car le 5 s'élimine :

$$3x^2 - 12x + 5 = 5 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0$$

D'où $x = 0$ ou $x = 4$. Les solutions sont 0 et 4.

d) Oui. Leur moyenne vaut

$$\frac{0 + 4}{2} = 2 = \alpha$$

Elles sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 2$, l'axe de symétrie de la parabole. C'était prévisible : deux abscisses de **même image** sont toujours symétriques par rapport à cet axe.

e) Non. Le minimum de f est -7 , donc $f(x) \geq -7 > -10$ pour tout réel x : la valeur -10 n'est jamais atteinte.

Le bilan de la plaquette. La forme canonique donne le sommet, donc les variations, donc l'extremum, donc la réponse immédiate à toute question du type « telle valeur est-elle atteinte ? ». C'est le calcul le plus rentable du chapitre.

Réponse. a) $f(x) = 3(x - 2)^2 - 7$ — b) décroissante puis croissante, minimum -7 en $x = 2$ — c) $x = 0$ ou $x = 4$ — d) oui, leur moyenne vaut 2 — e) non, car $f(x) \geq -7$.