

Plaquette 1 - Les trois formes et les calculs

Fonctions polynômes du second degré — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois écritures d'un trinôme du second degré.

- **Définition.** Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0$$

a , b et c sont les **coefficients** ; la condition $a \neq 0$ est essentielle (sinon la fonction est affine).

- **Forme factorisée** (quand elle existe) : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Elle donne immédiatement les **racines** x_1 et x_2 .
- **Forme canonique** : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Elle donne immédiatement le **sommet** $S(\alpha; \beta)$.

- **Équation produit nul.** C'est la propriété qui rend la forme factorisée si utile :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0$$

- **Identités remarquables**, dans les deux sens :

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 \quad (u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 \quad u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$$

- **Image et antécédent.** Calculer $f(a)$ est une substitution ; chercher les antécédents de k demande de **résoudre** $f(x) = k$.
- **Méthode de factorisation.** On cherche dans l'ordre : un **facteur commun**, puis une **différence de carrés**, puis un **carré parfait**. Si rien ne se voit, c'est le discriminant qui prendra le relais (plaquette 3).

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître un trinôme et ses coefficients

On compare chaque expression à la forme de référence du cours :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0$$

a) **Oui.** L'écriture est déjà développée : $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$. On lit les coefficients avec leur **signe**.

b) **Oui.** Il manque le terme en x , ce qui signifie simplement que son coefficient est nul : $a = -1$, $b = 0$ et $c = 7$.

c) **Oui**, mais il faut développer pour le voir :

$$h(x) = (x - 1)(x + 4) = x^2 + 4x - x - 4 = x^2 + 3x - 4$$

Donc $a = 1$, $b = 3$ et $c = -4$. L'énoncé donnait la forme **factorisée** du même trinôme.

d) **Non.** Le terme $2x^3$ est de degré 3 : k est une fonction polynôme du troisième degré, hors du chapitre.

L'erreur à éviter. Lire $a = 1$ dans l'expression $-x^2 + 7$ en oubliant le signe : le coefficient de x^2 est bien -1 , et c'est lui qui décidera plus tard du sens de la parabole.

Réponse. a) oui, $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$ — b) oui, $a = -1$, $b = 0$, $c = 7$ — c) oui, $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$ — d) non, degré 3.

Correction de l'exercice 2 - Calculer quatre images

Calculer une image, c'est **remplacer** x par la valeur donnée dans l'expression :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

- $f(0) = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$. C'est l'**ordonnée à l'origine** : elle est toujours égale au coefficient c .
- $f(1) = 2 \times 1 - 3 \times 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$. Donc 1 est une **racine** de f .
- $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 2 \times 4 + 6 + 1 = 15$.
- $f(0,5) = 2 \times 0,25 - 3 \times 0,5 + 1 = 0,5 - 1,5 + 1 = 0$. Donc 0,5 est une seconde racine.

Les deux pièges du calcul. D'abord $(-2)^2 = +4$ et non -4 : le carré d'un nombre négatif est positif, les parenthèses sont indispensables. Ensuite $-3 \times (-2) = +6$: deux signes moins donnent un plus.

Ce que le calcul a révélé. $f(1) = 0$ et $f(0,5) = 0$: le trinôme admet deux racines, donc il se factorisera sous la forme $2(x - 1)(x - 0,5)$.

Réponse. $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(-2) = 15$ et $f(0,5) = 0$.

Correction de l'exercice 3 - Développer une forme factorisée

a) On développe d'abord le produit des deux parenthèses, puis on multiplie par 3 :

$$(x - 2)(x + 5) = x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 3x - 10$$

$$f(x) = 3(x^2 + 3x - 10) = 3x^2 + 9x - 30$$

b) Par identification avec $ax^2 + bx + c$: $a = 3$, $b = 9$ et $c = -30$.

c) Avec la forme factorisée : $f(0) = 3 \times (0 - 2) \times (0 + 5) = 3 \times (-2) \times 5 = -30$.

Avec la forme développée : $f(0) = 3 \times 0 + 9 \times 0 - 30 = -30$.

Les deux valeurs concordent : le développement est correct.

Pourquoi tester en $x = 0$. C'est le calcul le plus rapide, et il détecte la plupart des erreurs de signe. Si les deux résultats diffèrent, c'est que le développement est faux — on peut aussi tester $x = 1$ pour plus de sûreté.

Réponse. a) $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$ — b) $a = 3$, $b = 9$, $c = -30$ — c) $f(0) = -30$ dans les deux écritures.

Correction de l'exercice 4 - Développer une forme canonique

a) On développe le carré avec l'identité remarquable du cours, puis on distribue le facteur 2 :

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 \quad \text{donc} \quad (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$g(x) = 2(x^2 - 6x + 9) - 8 = 2x^2 - 12x + 18 - 8 = 2x^2 - 12x + 10$$

b) Avec la forme de l'énoncé, le calcul est immédiat :

$$g(3) = 2 \times (3 - 3)^2 - 8 = 2 \times 0 - 8 = -8$$

C'est tout l'intérêt de la forme canonique : en $x = 3$, le carré s'annule.

c) Le point $(3; -8)$ est le **sommet** de la parabole. Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut et ce sommet est le point le plus bas : -8 est le **minimum** de g , atteint en $x = 3$.

L'erreur classique du développement. Écrire $(x - 3)^2 = x^2 - 9$: le double produit

$-2 \times x \times 3 = -6x$ est oublié. On le repère en testant $x = 1$: $(1 - 3)^2 = 4$, alors que $1 - 9 = -8$.

Réponse. a) $g(x) = 2x^2 - 12x + 10$ — b) $g(3) = -8$ — c) c'est le sommet de la parabole, et -8 est le minimum de g .

Correction de l'exercice 5 - Trois écritures, une seule fonction

a) On calcule chaque expression en $x = 2$:

- $A(2) = 4 - 4 - 3 = -3$;
- $B(2) = (2 - 1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$;
- $C(2) = (2 - 3)(2 + 1) = (-1) \times 3 = -3$.

Les trois valeurs sont égales : c'est un indice, mais pas une démonstration (trois expressions différentes peuvent coïncider en un point).

b) On développe B et C pour les comparer à A :

$$B(x) = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3 = A(x)$$

$$C(x) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3 = A(x)$$

Les trois expressions ont la **même forme développée** : elles définissent bien la même fonction, pour tout réel x .

c) Chaque forme a son usage :

- pour les **racines**, la forme factorisée C : le produit est nul si $x = 3$ ou $x = -1$;
- pour le **sommet**, la forme canonique B : $S(1 ; -4)$;
- pour l'**ordonnée à l'origine**, la forme développée A : $f(0) = -3$, c'est le coefficient c .

La compétence visée. Ne pas calculer à l'aveugle : avant de résoudre, on regarde quelle écriture rend la question immédiate. C'est le fil rouge de tout le chapitre.

Réponse. a) les trois valent -3 — b) les trois se développent en $x^2 - 2x - 3$ — c) factorisée pour les racines, canonique pour le sommet, développée pour l'ordonnée à l'origine.

Correction de l'exercice 6 - Lire les racines sur une forme factorisée

Une racine est un réel dont l'image est nulle. Sur une forme factorisée, on applique la propriété du produit nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

a) $x - 7 = 0$ ou $x + 2 = 0$, donc les racines sont 7 et -2 .

b) Le facteur 5 n'est jamais nul : il ne donne aucune racine. Restent $x - 1 = 0$ ou $x - 6 = 0$, donc les racines sont 1 et 6.

c) Ici le carré impose $(x + 4)^2 = 0$, donc $x + 4 = 0$: il y a une **racine double**, $x = -4$. La parabole ne touche l'axe des abscisses qu'en un seul point.

d) Le premier facteur donne $x = 0$, le second $2x - 10 = 0$, soit $x = 5$. Les racines sont 0 et 5.

Le piège des signes. Dans $(x - 7)$, la racine est $+7$ et non -7 : on cherche la valeur qui **annule** le facteur. Le réflexe est de résoudre l'équation, jamais de recopier le nombre visible.

Réponse. a) 7 et -2 — b) 1 et 6 — c) racine double -4 — d) 0 et 5.

Correction de l'exercice 7 - Résoudre une équation produit nul

On utilise chaque fois la propriété du produit nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

a) $2x - 6 = 0$ donne $2x = 6$, soit $x = 3$; $x + 1 = 0$ donne $x = -1$. Les solutions sont 3 et -1 .

b) $x - 3 = 0$ donne $x = 3$; $4x + 2 = 0$ donne $4x = -2$, soit $x = -0,5$. Les solutions sont 3 et $-0,5$.

c) L'expression n'est pas encore factorisée : on met x en **facteur commun** avant d'appliquer la propriété.

$$x^2 + 5x = x(x + 5) = 0$$

D'où $x = 0$ ou $x + 5 = 0$, donc les solutions sont 0 et -5 .

L'erreur la plus coûteuse. À la question c), diviser les deux membres par x pour obtenir $x + 5 = 0$: cela **perd** la solution $x = 0$. On ne divise jamais par une quantité qui peut être nulle — on factorise.

Réponse. a) 3 et -1 — b) 3 et $-0,5$ — c) 0 et -5 .

Correction de l'exercice 8 - Factoriser une différence de carrés

On reconnaît la troisième identité remarquable du cours :

$$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$$

a) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$. Racines : 4 et -4 .

b) Il faut voir $4x^2$ comme un carré : $4x^2 = (2x)^2$, donc

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$$

Racines : $x = 1,5$ et $x = -1,5$.

c) Le nombre 5 est bien un carré, celui de $\sqrt{5}$:

$$x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Racines : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$, soit environ 2,24 et $-2,24$.

d) Ici la **somme** de deux carrés ne se factorise pas. Et pour cause : $x^2 + 9 \geq 9 > 0$ pour tout réel x , donc cette expression ne s'annule jamais : elle n'a **aucune racine**.

Le critère à retenir. L'identité ne marche qu'avec un signe **moins** entre les deux carrés. Une somme de carrés reste telle quelle — et signale un trinôme sans racine.

Réponse. a) $(x - 4)(x + 4)$, racines ± 4 — b) $(2x - 3)(2x + 3)$, racines $\pm 1,5$ — c) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$, racines $\pm\sqrt{5}$ — d) pas de factorisation, pas de racine.

Correction de l'exercice 9 - Factoriser par un facteur commun

On cherche d'abord un facteur commun, puis une identité remarquable sur ce qui reste.

a) Le facteur commun est $3x$:

$$3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

b) Facteur commun $5x$: $5x^2 + 10x = 5x(x + 2)$.

c) Le facteur commun est 2, et il reste alors une différence de carrés :

$$2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3)$$

C'est ce qu'on appelle factoriser « le plus complètement possible » : on ne s'arrête pas à $2(x^2 - 9)$.

d) Aucun facteur commun ici, mais on reconnaît un **carré parfait** :

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x - 3)^2$$

Comment vérifier un carré parfait. Le terme constant doit être un carré ($9 = 3^2$) et le terme du milieu doit valoir le double produit ($2 \times x \times 3 = 6x$) ✓ Si l'un des deux ne colle pas, ce n'est pas un carré parfait.

Réponse. a) $3x(x - 4)$ — b) $5x(x + 2)$ — c) $2(x - 3)(x + 3)$ — d) $(x - 3)^2$.

Correction de l'exercice 10 - Chercher les antécédents d'un nombre

a) On développe la forme proposée et on compare :

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 = f(x)$$

L'égalité est vraie pour tout réel x : f est bien le carré de $x - 2$.

b) Chercher les antécédents de 1, c'est résoudre $f(x) = 1$, donc

$$(x - 2)^2 = 1$$

Un carré vaut 1 lorsque la quantité élevée au carré vaut 1 **ou** -1 :

— $x - 2 = 1$, donc $x = 3$;

— $x - 2 = -1$, donc $x = 1$.

Les antécédents de 1 sont donc 1 et 3. Contrôle : $f(3) = 9 - 12 + 4 = 1$ ✓

c) Il faudrait résoudre $(x - 2)^2 = -3$. Or un carré est **toujours positif ou nul** : aucune valeur de x ne convient. Le nombre -3 n'a donc **aucun antécédent** par f .

Le raisonnement à garder. Avant de résoudre, on regarde si l'équation a une chance d'avoir une solution : ici $f(x) = (x - 2)^2 \geq 0$, donc f ne prend jamais de valeur négative. Son minimum est 0, atteint en $x = 2$.

Réponse. a) $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ — b) 1 et 3 — c) aucun antécédent, car un carré n'est jamais négatif.

Correction de l'exercice 11 - Le rectangle de périmètre donné

a) Le périmètre d'un rectangle est $P = 2 \times (\text{largeur} + \text{longueur})$. Ici :

$$2(x + L) = 20 \Leftrightarrow x + L = 10 \Leftrightarrow L = 10 - x$$

La contrainte $0 < x < 10$ garantit que la longueur reste positive.

b) L'aire d'un rectangle est le produit de ses deux dimensions :

$$A(x) = x \times (10 - x) = 10x - x^2 = -x^2 + 10x$$

C'est bien un trinôme du second degré, avec $a = -1$, $b = 10$ et $c = 0$.

c) On calcule les deux aires :

— $A(3) = -9 + 30 = 21 \text{ cm}^2$ (rectangle 3×7) ;

— $A(5) = -25 + 50 = 25 \text{ cm}^2$ (carré 5×5).

L'aire est plus grande pour $x = 5$. C'est un résultat classique : **à périmètre fixé, le carré est le rectangle d'aire maximale**. La forme canonique $A(x) = -(x - 5)^2 + 25$, que l'on verra dans la plaquette suivante, le démontre en une ligne.

Ce que l'exercice montre. Un trinôme apparaît naturellement dès qu'on multiplie deux

grandeurs liées par une somme constante. C'est la situation d'optimisation la plus fréquente au bac.

Réponse. a) $L = 10 - x$ — b) $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$ — c) 21 cm² et 25 cm² : le carré de côté 5 cm est plus grand.

Correction de l'exercice 12 - Un tableau de valeurs symétrique

a) On remplace x par chaque valeur dans $f(x) = x^2 - 6x + 5$:

— $f(0) = 5$; $f(1) = 1 - 6 + 5 = 0$; $f(2) = 4 - 12 + 5 = -3$;

— $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$; $f(4) = 16 - 24 + 5 = -3$;

— $f(5) = 25 - 30 + 5 = 0$; $f(6) = 36 - 36 + 5 = 5$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

b) Les valeurs se **répètent en miroir** autour de la colonne $x = 3$: $f(2) = f(4) = -3$, $f(1) = f(5) = 0$, $f(0) = f(6) = 5$. La plus petite valeur, -4 , est atteinte au centre de cette symétrie.

c) La courbe d'un trinôme est une parabole, symétrique par rapport à la verticale passant par son sommet. Cette symétrie a lieu ici en $x = 3$:

$$S(3; -4) \text{ et } f(3) = -4 \text{ est le minimum de } f$$

Les racines se lisent dans le tableau : $f(1) = 0$ et $f(5) = 0$, donc les racines sont 1 et 5. On remarque qu'elles sont **symétriques** par rapport à 3 : $\frac{1+5}{2} = 3$.

Le contrôle gratuit. L'abscisse du sommet est toujours la moyenne des deux racines. C'est une vérification à faire systématiquement quand on a trouvé les deux.

Réponse. a) 5 ; 0 ; -3 ; -4 ; -3 ; 0 ; 5 — b) symétrie autour de $x = 3$ — c) sommet $S(3; -4)$, racines 1 et 5.

Correction de l'exercice 13 - Vrai ou faux sur le second degré

a) **Faux.** Il faut développer avant de conclure :

$$f(x) = x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$$

Les termes en x^2 se simplifient : f est une fonction **affine**, pas un trinôme. C'est pourquoi on développe toujours avant d'annoncer le degré.

b) **Faux.** La définition du cours impose $a \neq 0$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

Si $a = 0$, l'expression devient $bx + c$, donc une fonction affine : il n'y a plus de terme du second degré.

c) **Faux.** Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: l'expression ne s'annule jamais, elle n'a **aucune** racine. Sa courbe est une parabole entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.

d) **Vrai.** Si 2 est une racine, alors le trinôme se factorise par $(x - 2)$. Par exemple, pour $f(x) = x^2 - 5x + 6$, on a $f(2) = 4 - 10 + 6 = 0$ et effectivement $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

Le lien à retenir. « r est une racine » et « $(x - r)$ est un facteur » sont deux façons de dire la même chose. C'est ce lien qui fait toute l'utilité de la forme factorisée.

Réponse. a) faux, $f(x) = 6x + 9$ est affine — b) faux, $a \neq 0$ par définition — c) faux, aucune racine — d) vrai.

Correction de l'exercice 14 - Coût de production d'un atelier

a) On remplace q par chaque valeur dans l'expression du coût :

$$C(q) = 0,5q^2 - 4q + 30$$

— $C(2) = 0,5 \times 4 - 8 + 30 = 2 - 8 + 30 = 24$, soit 2 400 € ;

— $C(4) = 0,5 \times 16 - 16 + 30 = 8 - 16 + 30 = 22$, soit 2 200 € ;

— $C(10) = 0,5 \times 100 - 40 + 30 = 50 - 40 + 30 = 40$, soit 4 000 €.

b) $C(0) = 30$, soit 3 000 €. C'est le coût **fixe** : ce que coûte l'atelier même sans produire (loyer, entretien, salaires).

c) Non. Une grandeur proportionnelle à q s'écrirait $C(q) = kq$, et le quotient $\frac{C(q)}{q}$ serait constant. Or :

$$\frac{C(2)}{2} = 12 \quad \frac{C(4)}{4} = 5,5 \quad \frac{C(10)}{10} = 4$$

Ces quotients sont tous différents : le coût n'est pas proportionnel. On observe même quelque chose d'intéressant — produire 4 tonnes coûte **moins cher** que produire 2 tonnes, parce que le coût fixe se répartit sur davantage de production. Au-delà, le terme en q^2 reprend le dessus et le coût remonte.

Le vocabulaire économique. Le quotient $\frac{C(q)}{q}$ est le **coût moyen** par tonne ; le chapitre de la dérivation permettra d'en chercher le minimum.

Réponse. a) 2 400 €, 2 200 € et 4 000 € — b) le coût fixe, 3 000 € — c) non, les quotients $\frac{C(q)}{q}$ valent 12 ; 5,5 ; 4.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : passer d'une forme à l'autre

a) On développe la forme factorisée proposée :

$$(x - 5)(x + 1) = x^2 + x - 5x - 5 = x^2 - 4x - 5$$

$$-2(x^2 - 4x - 5) = -2x^2 + 8x + 10 = f(x)$$

L'égalité est donc vraie pour tout réel x .

b) On développe la forme canonique proposée :

$$-2(x - 2)^2 + 18 = -2(x^2 - 4x + 4) + 18 = -2x^2 + 8x - 8 + 18 = -2x^2 + 8x + 10 = f(x)$$

c) Chaque forme donne son information sans calcul :

— la forme **factorisée** donne les racines. Le facteur -2 n'est jamais nul, donc $f(x) = 0$ équivaut à $x - 5 = 0$ ou $x + 1 = 0$: les racines sont 5 et -1 ;

— la forme **canonique** $a(x - \alpha)^2 + \beta$ donne le sommet $S(2 ; 18)$. Comme $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas : 18 est le **maximum** de f , atteint en $x = 2$.

Contrôle : l'abscisse du sommet est la moyenne des racines, $\frac{5 + (-1)}{2} = 2$ ✓

d) Les deux calculs, avec la forme développée :

— $f(0) = 10$;

— $f(4) = -2 \times 16 + 32 + 10 = -32 + 42 = 10$.

Les deux images sont égales parce que 0 et 4 sont **symétriques par rapport à** $x = 2$, l'axe de symétrie de la parabole : $\frac{0 + 4}{2} = 2$. Deux abscisses symétriques par rapport au sommet ont toujours la même image.

Le bilan de la plaquette. Trois écritures, trois usages : développée pour $f(0)$, factorisée pour les racines, canonique pour le sommet. Les plaquettes suivantes apprendront à **construire** ces formes, et non plus seulement à les vérifier.

Réponse. c) racines 5 et -1 , sommet $S(2 ; 18)$, maximum 18 — d) $f(0) = f(4) = 10$, car 0 et 4 sont symétriques par rapport à l'axe $x = 2$.