

Plaquette 5 - Parabole et problèmes de synthèse

Fonctions polynômes du second degré — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Tracer, lire et exploiter une parabole.

— Les quatre informations qui suffisent à tracer.

signe de a (sens) ; $S(\alpha; \beta)$ (sommet) ; les racines si $\Delta \geq 0$; $f(0) = c$

— Axe de symétrie : la droite d'équation $x = \alpha$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Deux abscisses symétriques par rapport à α ont la même image, ce qui permet de placer les points deux par deux.

— Retrouver une expression depuis un graphique.

sommet $S(\alpha; \beta)$ et un point $\Rightarrow f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$; deux racines et un point $\Rightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Dans les deux cas, le point restant sert à calculer a .

— Intersections. Avec l'axe des ordonnées : le point $(0; c)$, toujours unique. Avec l'axe des abscisses : 0, 1 ou 2 points selon le signe de Δ . Avec une autre courbe : on résout l'égalité des deux expressions.

— Résolution graphique. $f(x) = k$: abscisses des points d'intersection avec la droite $y = k$. $f(x) \geq k$: abscisses des points situés au-dessus de cette droite.

— La démarche d'un problème d'optimisation. 1. nommer l'inconnue et donner son domaine de validité ; 2. exprimer la grandeur à optimiser sous la forme $ax^2 + bx + c$; 3. calculer α et β : β est l'optimum, α la valeur qui le réalise ; 4. vérifier que α appartient au domaine, puis conclure par une phrase avec les unités.

— Contrainte à respecter (« au moins », « au plus ») : on écrit l'inéquation, on la ramène à une comparaison à 0 et on conclut par un tableau de signes.

Correction de l'exercice 1 - Tracer une parabole point par point

a) Avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$:

$$\alpha = -\frac{-2}{2} = 1 \quad \beta = f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$$

Le sommet est $S(1; -4)$. Pour les racines :

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad \text{donc} \quad x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

L'ordonnée à l'origine est $f(0) = c = -3$.

b) On calcule les sept images :

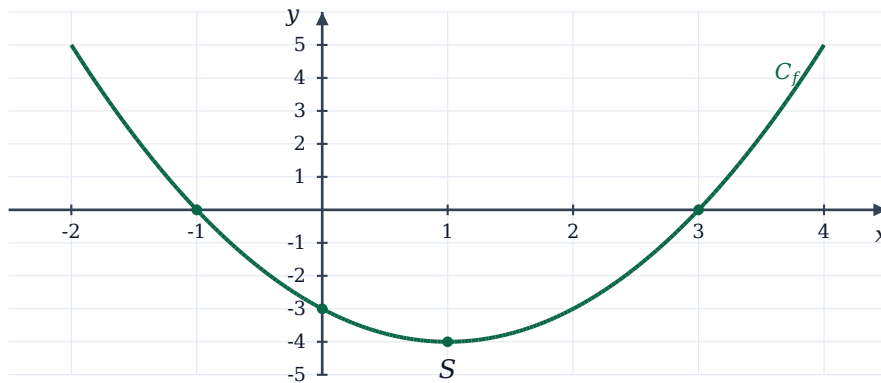
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

c) On place d'abord les points remarquables — sommet $S(1; -4)$, racines $(-1; 0)$ et $(3; 0)$, ordonnée à l'origine $(0; -3)$ — puis les autres points du tableau, et on joint par une courbe régulière tournée vers le haut puisque $a > 0$. Le tracé figure dans le corrigé ci-dessous.

Le contrôle de symétrie. Les valeurs du tableau se lisent en miroir autour de $x = 1$:

$f(0) = f(2) = -3$, $f(-1) = f(3) = 0$, $f(-2) = f(4) = 5$. Si une paire ne correspond pas, c'est qu'un calcul est faux — la symétrie divise le travail par deux.

Réponse. a) $S(1; -4)$, racines -1 et 3 , $f(0) = -3$ — b) $5; 0; -3; -4; -3; 0; 5$.



La parabole de $f(x) = x^2 - 2x - 3$, avec son sommet et ses racines.

Correction de l'exercice 2 - Associer chaque parabole à son expression

a) On utilise deux critères indépendants : le **sens** (signe de a) et l'**ordonnée à l'origine** (c).

- Une seule parabole est tournée vers le bas, C_2 : c'est celle de g , dont le coefficient $a = -1$ est négatif.
- Les deux autres montent. On les départage par leur ordonnée à l'origine : $f(0) = -4$ et $h(0) = 1$. La courbe qui coupe l'axe des ordonnées en -4 est C_1 , donc celle de f ; celle qui le coupe en 1 est C_3 , donc celle de h .

Second argument pour confirmer : h ne coupe pas l'axe des abscisses (voir b), ce qui correspond bien à C_3 , entièrement au-dessus.

b) Les racines de chacune :

- $f(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, donc racines -2 et 2 ;
- $g(x) = -x^2 + 4 = -(x - 2)(x + 2)$, donc racines -2 et 2 également — les deux courbes coupent l'axe aux mêmes points, elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cet axe ;
- $h(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$: **aucune racine**, ce que confirme $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$.

La méthode de reconnaissance. Trois questions dans l'ordre : vers le haut ou vers le bas (a) ? où coupe-t-elle l'axe des ordonnées (c) ? coupe-t-elle l'axe des abscisses, et où (Δ) ? Ces trois réponses identifient une parabole sans ambiguïté.

Réponse. a) C_1 pour f , C_2 pour g , C_3 pour h — b) f et g ont pour racines -2 et 2 ; h n'a aucune racine.

Correction de l'exercice 3 - Tout lire sur un graphique

a) Par lecture graphique :

- le point le plus haut est $(2; 4)$: c'est le **sommet** $S(2; 4)$;
- la courbe coupe l'axe des abscisses en 0 et en 4 : les **racines** sont 0 et 4 ;
- elle coupe l'axe des ordonnées en 0 , donc $f(0) = 0$ — ce qui est cohérent, 0 étant une racine.

On peut alors reconstituer l'expression : $f(x) = a(x - 2)^2 + 4$ et $f(0) = 0$ donnent $4a + 4 = 0$, soit $a = -1$, d'où $f(x) = -(x - 2)^2 + 4 = -x^2 + 4x$.

b) La parabole est tournée vers le bas, donc $a < 0$ (on a trouvé $a = -1$). La fonction croît jusqu'au sommet puis décroît :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		croissante	4	décroissante	

c) Lectures graphiques :

- $f(x) \geq 0$: la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses **entre** les racines, bornes incluses, donc $S = [0; 4]$;
- $f(x) \leq 3$: la courbe est en dessous de la droite $y = 3$ à l'extérieur de ses deux points d'intersection, situés en $x = 1$ et $x = 3$. Donc $S =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$.

Contrôle par le calcul pour la seconde : $-x^2 + 4x \leq 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 \leq 0$, dont les racines sont 1 et 3 ($\Delta = 16 - 12 = 4$) ✓

Le réflexe de lecture. Une inéquation graphique se lit toujours « courbe au-dessus / en dessous de la droite », et les bornes sont les **abscisses** des points d'intersection — jamais les ordonnées.

Réponse. a) $S(2; 4)$, racines 0 et 4, $f(0) = 0$ — b) $a < 0$, croissante puis décroissante — c) $[0; 4]$ puis $]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$.

Correction de l'exercice 4 - Retrouver un trinôme à partir de ses racines

a) Les deux racines étant connues, la forme factorisée du cours s'écrit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 1)(x - 3)$$

Le coefficient a reste inconnu : une infinité de paraboles ont les mêmes racines, plus ou moins « ouvertes ».

b) Le point $(0; -6)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = -6$:

$$a(0 + 1)(0 - 3) = -6 \Leftrightarrow -3a = -6 \Leftrightarrow a = 2$$

D'où $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$.

c) On développe :

$$f(x) = 2(x^2 - 3x + x - 3) = 2(x^2 - 2x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$$

Pour le sommet : $\alpha = -\frac{-4}{4} = 1$, qui est bien la moyenne des racines $\frac{-1+3}{2} = 1$ ✓ et

$$\beta = f(1) = 2 - 4 - 6 = -8$$

Le sommet est $S(1; -8)$, et -8 est le minimum de f puisque $a = 2 > 0$.

Les deux façons de déterminer une parabole. Racines + un point, ou sommet + un point : dans les deux cas, trois informations numériques, ce qui est exactement le nombre de coefficients a , b , c à trouver.

Réponse. a) $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$ — b) $a = 2$ — c) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, sommet $S(1; -8)$.

Correction de l'exercice 5 - Décrire une parabole sans la tracer

Les trois expressions sont déjà sous forme canonique : tout se lit directement.

a) $a = 2 > 0$: parabole tournée **vers le haut**, de sommet $S(3; 1)$. Le minimum vaut $1 > 0$, donc la courbe est entièrement au-dessus de l'axe des abscisses : **aucune** intersection. (Contrôle : $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$ et $\Delta = 144 - 152 = -8 < 0$ ✓)

b) $a = -1 < 0$: parabole tournée **vers le bas**, de sommet $S(-2; 0)$. Le maximum vaut 0, atteint sur l'axe des abscisses : la parabole y est **tangente**, il y a **une** intersection, en

$$x = -2.$$

c) $a = 0,5 > 0$: parabole tournée **vers le haut**, de sommet $S(1; -2)$. Le minimum est négatif et la parabole remonte ensuite : elle coupe donc l'axe des abscisses en **deux** points. On les calcule :

$$0,5(x-1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x-1 = \pm 2$$

Les racines sont 3 et -1.

La règle générale. Le nombre d'intersections se lit sur le **signe de β comparé à celui de a** : si a et β sont de même signe, aucune intersection ; si $\beta = 0$, une seule ; s'ils sont de signes contraires, deux. C'est la même information que le signe de Δ , lue autrement.

Réponse. a) vers le haut, $S(3; 1)$, aucune intersection — b) vers le bas, $S(-2; 0)$, une intersection — c) vers le haut, $S(1; -2)$, deux intersections (-1 et 3).

Correction de l'exercice 6 - Intersections avec les deux axes

a) Un point de l'axe des abscisses a une ordonnée nulle : on résout $f(x) = 0$. Avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -12$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49$$

Comme $\sqrt{49} = 7$:

$$x_1 = \frac{1-7}{2} = -3 \quad x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$$

Les points d'intersection sont donc $A(-3; 0)$ et $B(4; 0)$.

b) Un point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle : son ordonnée est $f(0) = -12$, c'est-à-dire le coefficient c . Le point est $C(0; -12)$.

c) Le sommet : $\alpha = -\frac{-1}{2} = 0,5$ et

$$\beta = f(0,5) = 0,25 - 0,5 - 12 = -12,25$$

Sommet $S(0,5; -12,25)$.

Les contrôles. L'abscisse du sommet doit être la moyenne des racines : $\frac{-3+4}{2} = 0,5 \checkmark$

Le minimum doit être inférieur à $f(0) = -12$, puisque 0 est proche de α mais différent : $-12,25 < -12 \checkmark$ Enfin le produit des racines doit valoir $\frac{c}{a} = -12$, et $-3 \times 4 = -12 \checkmark$

Combien de points au maximum. Une parabole coupe l'axe des ordonnées en **exactement un** point (celui d'abscisse 0), et l'axe des abscisses en 0, 1 ou 2 points. Annoncer deux points sur l'axe des ordonnées est impossible : ce ne serait plus une fonction.

Réponse. a) $A(-3; 0)$ et $B(4; 0)$ — b) $C(0; -12)$ — c) $S(0,5; -12,25)$, cohérent avec la moyenne des racines.

Correction de l'exercice 7 - Une parabole tangente à l'axe des abscisses

a) Être tangente à l'axe des abscisses signifie avoir **exactement un** point commun avec lui, c'est-à-dire une racine double, donc un discriminant nul.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

b) Pour $m = 1$, la fonction est $f_1(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, dont la racine double est

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

Le point de tangence est donc $(1 ; 0)$: c'est aussi le sommet de la parabole, ce qui est toujours le cas quand $\Delta = 0$.

c) Pour $m = 5$, deux justifications indépendantes :

- **par le discriminant** : $\Delta = 4 - 4 \times 5 = -16 < 0$, donc aucune racine : la parabole ne coupe pas l'axe ;
- **par la forme canonique** : $\alpha = 1$ et $\beta = f_5(1) = 1 - 2 + 5 = 4$, donc $f_5(x) = (x - 1)^2 + 4 \geq 4 > 0$. La parabole est entièrement au-dessus de l'axe, à une distance minimale de 4.

Ce que m fait géométriquement. Faire varier m translate la parabole **verticalement** : son sommet reste à l'abscisse 1 et monte quand m augmente. Pour $m < 1$ elle coupe l'axe deux fois, pour $m = 1$ elle le touche, pour $m > 1$ elle ne le rencontre plus.

Réponse. a) $m = 1$ — b) point de tangence $(1 ; 0)$ — c) non : $\Delta = -16 < 0$, et $f_5(x) = (x - 1)^2 + 4 \geq 4$.

Correction de l'exercice 8 - L'arche d'un pont

a) Trois vérifications. D'abord les deux extrémités au sol :

$$h(0) = 0 \quad h(40) = -0,02 \times 1\,600 + 0,8 \times 40 = -32 + 32 = 0$$

La portée est bien de 40 m. Ensuite la hauteur maximale, au sommet :

$$\alpha = -\frac{0,8}{2 \times (-0,02)} = -\frac{0,8}{-0,04} = 20 \quad \beta = h(20) = -8 + 16 = 8$$

La hauteur maximale est de 8 m, atteinte au milieu de l'arche. Le modèle est cohérent.

b) À 10 m de la base gauche :

$$h(10) = -0,02 \times 100 + 0,8 \times 10 = -2 + 8 = 6 \text{ m}$$

c) On cherche les abscisses où la hauteur vaut 6 m, donc on résout $h(x) = 6$:

$$-0,02x^2 + 0,8x = 6 \Leftrightarrow -0,02x^2 + 0,8x - 6 = 0$$

On multiplie par -50 pour se débarrasser des décimaux :

$$x^2 - 40x + 300 = 0$$

Avec $\Delta = 1\,600 - 1\,200 = 400$ et $\sqrt{400} = 20$:

$$x_1 = \frac{40 - 20}{2} = 10 \quad x_2 = \frac{40 + 20}{2} = 30$$

L'arche atteint 6 m de hauteur en $x = 10$ (ce que confirme la question b) et en $x = 30$. Sa largeur à cette hauteur est donc

$$30 - 10 = 20 \text{ m}$$

Le contrôle par la symétrie. Les deux abscisses 10 et 30 sont symétriques par rapport à $x = 20$, le milieu de l'arche ✓ Un camion de 6 m de haut et moins de 20 m de large peut donc passer — s'il roule au centre.

Réponse. a) $h(0) = h(40) = 0$ et $h(20) = 8$ — b) 6 m — c) 20 m de largeur (entre $x = 10$ et $x = 30$).

Correction de l'exercice 9 - La section d'une gouttière

a) La bande mesure 30 cm de large ; on en relève x de chaque côté, il reste donc pour le fond

$$30 - 2x$$

Pour que la gouttière existe, il faut $x > 0$ et $30 - 2x > 0$, soit $0 < x < 15$.

b) La section est un rectangle de largeur $30 - 2x$ et de hauteur x :

$$A(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2 = -2x^2 + 30x$$

c) Le coefficient $a = -2$ est négatif : l'aire admet un maximum, atteint au sommet.

$$\alpha = -\frac{30}{2 \times (-2)} = -\frac{30}{-4} = 7,5$$

$$\beta = A(7,5) = -2 \times 56,25 + 225 = -112,5 + 225 = 112,5$$

Comme $7,5 \in]0 ; 15[$, l'optimum est atteignable : il faut plier les bords à 7,5 cm de hauteur, ce qui donne un fond de $30 - 15 = 15$ cm et une section de $112,5 \text{ cm}^2$.

d) On résout $A(x) \geq 100$:

$$-2x^2 + 30x \geq 100 \Leftrightarrow -2x^2 + 30x - 100 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 \leq 0$$

(division par -2 , donc l'inégalité change de sens). Avec $\Delta = 225 - 200 = 25$:

$$x_1 = \frac{15-5}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{15+5}{2} = 10$$

Le coefficient de x^2 étant positif, le trinôme est négatif entre les racines : $S = [5 ; 10]$, intervalle inclus dans le domaine. La section dépasse 100 cm^2 pour une hauteur de pliage comprise **entre 5 cm et 10 cm**.

La cohérence du résultat. L'intervalle $[5 ; 10]$ est centré sur 7,5, la hauteur optimale ✓
La section est donc « presque optimale » sur une plage assez large : un pliage à 6 cm donne déjà 108 cm^2 .

Réponse. a) fond $30 - 2x$, avec $0 < x < 15$ — b) $A(x) = x(30 - 2x)$ — c) $x = 7,5$ cm pour une aire maximale de $112,5 \text{ cm}^2$ — d) $x \in [5 ; 10]$.

Correction de l'exercice 10 - Recette, coût et bénéfice

a) Chaque unité est vendue 15 €, donc la recette est proportionnelle à la quantité :

$$R(q) = 15q$$

Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût :

$$B(q) = 15q - (q^2 + 3q + 20) = 15q - q^2 - 3q - 20 = -q^2 + 12q - 20$$

b) On résout $B(q) \geq 0$. Avec $a = -1$, $b = 12$ et $c = -20$:

$$\Delta = 144 - 4 \times (-1) \times (-20) = 144 - 80 = 64$$

Comme $\sqrt{64} = 8$ et $2a = -2$:

$$q_1 = \frac{-12-8}{-2} = 10 \quad q_2 = \frac{-12+8}{-2} = 2$$

Le coefficient a étant négatif, le trinôme est positif **entre** les racines :

q	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$B(q)$		-	0	+	0	-	

L'atelier est donc bénéficiaire pour $q \in [2 ; 10]$, intervalle inclus dans le domaine $[0 ; 14]$.

c) Le bénéfice maximal est atteint au sommet :

$$\alpha = -\frac{12}{2 \times (-1)} = 6 \quad \beta = B(6) = -36 + 72 - 20 = 16$$

Il faut produire 6 unités, pour un bénéfice de 16 €. Contrôle : $R(6) = 90$ € et

$$C(6) = 36 + 18 + 20 = 74 \text{ €}, \text{ soit } 90 - 74 = 16 \text{ € } \checkmark$$

Pourquoi produire plus fait perdre de l'argent. Le coût contient un terme en q^2 : il croît de plus en plus vite, tandis que la recette croît de façon constante (15 € par unité). Au-delà de 10 unités, le coût marginal dépasse le prix de vente.

Réponse. a) $R(q) = 15q$ et $B(q) = -q^2 + 12q - 20$ — b) $q \in [2; 10]$ — c) 6 unités pour un bénéfice de 16 €.

Correction de l'exercice 11 - Deux paraboles qui se coupent

a) Un point commun a la même ordonnée sur les deux courbes :

$$x^2 - 2 = -x^2 + 4x$$

On ramène tout à gauche :

$$x^2 - 2 + x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0$$

On divise les deux membres par 2 (ce qui ne change rien à une **équation**) :

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

b) Avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -1$:

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

On simplifie $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$:

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

c) Comme $\sqrt{2} \approx 1,414$:

$$- x_1 \approx 1 - 1,414 = -0,414 \approx -0,41 ;$$

$$- x_2 \approx 1 + 1,414 = 2,414 \approx 2,41.$$

Le graphique confirme : les deux courbes se croisent un peu avant 0 et un peu après 2,4.

Le contrôle de la somme. $x_1 + x_2 = 2 = -\frac{b}{a} \checkmark$ et

$x_1 x_2 = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 = \frac{c}{a} \checkmark$ Les identités remarquables rendent ces vérifications immédiates même avec des racines carrées.

Réponse. a) l'égalité des ordonnées donne $2x^2 - 4x - 2 = 0$, soit $x^2 - 2x - 1 = 0$ — b) $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$ — c) environ $-0,41$ et $2,41$.

Correction de l'exercice 12 - Le prix qui maximise la recette

a) Chaque réduction fait baisser le prix de 0,50 € et augmenter la fréquentation de 20 spectateurs :

$$\text{prix} = 8 - 0,5x \quad \text{spectateurs} = 200 + 20x$$

b) La recette est le produit du prix par le nombre de spectateurs :

$$R(x) = (8 - 0,5x)(200 + 20x)$$

On développe :

$$R(x) = 1\,600 + 160x - 100x - 10x^2 = -10x^2 + 60x + 1\,600$$

C'est bien l'expression annoncée. On note que $R(0) = 1\,600$ € correspond à la situation actuelle (200×8).

c) Le coefficient $a = -10$ est négatif : la recette admet un maximum, au sommet.

$$\alpha = -\frac{60}{2 \times (-10)} = -\frac{60}{-20} = 3$$

$$\beta = R(3) = -90 + 180 + 1\,600 = 1\,690$$

Il faut donc appliquer 3 réductions de 0,50 €, soit un prix de

$$8 - 0,5 \times 3 = 6,50 \text{ €}$$

pour $200 + 60 = 260$ spectateurs et une recette de 1 690 €. Contrôle : $6,5 \times 260 = 1\,690$ € ✓

L'intérêt économique. Baisser le prix de 1,50 € fait gagner 90 € de recette. Mais au-delà de trois réductions, la baisse du prix n'est plus compensée par l'afflux de spectateurs : à $x = 6$, la recette redescend à 1 600 €, comme au départ.

Réponse. a) prix $8 - 0,5x$, spectateurs $200 + 20x$ — b) le développement donne $-10x^2 + 60x + 1\,600$ — c) 3 réductions, soit 6,50 € la place, 260 spectateurs et 1 690 € de recette.

Correction de l'exercice 13 - Deux nombres, une somme, un produit

a) Si l'un des nombres est x , l'autre est $12 - x$ pour que la somme vaille 12. La condition sur le produit s'écrit

$$x(12 - x) = 32$$

soit, en développant et en ramenant tout d'un côté :

$$12x - x^2 = 32 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

b) Avec $a = 1$, $b = -12$ et $c = 32$:

$$\Delta = 144 - 128 = 16$$

Comme $\sqrt{16} = 4$:

$$x_1 = \frac{12 - 4}{2} = 4 \quad x_2 = \frac{12 + 4}{2} = 8$$

Les deux solutions donnent le **même couple** : si $x = 4$, l'autre nombre est 8 ; si $x = 8$, l'autre est 4. Les deux nombres cherchés sont donc 4 et 8. Contrôle : $4 + 8 = 12$ ✓ et $4 \times 8 = 32$ ✓

c) On reprend la démarche avec un produit de 40 :

$$x(12 - x) = 40 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 40 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 160 = -16 < 0$: il n'existe **aucun** couple de réels de somme 12 et de produit 40.

L'explication. À somme fixée, le produit est maximal quand les deux nombres sont égaux : ici $6 \times 6 = 36$. Aucun produit supérieur à 36 n'est donc atteignable — et $40 > 36$. C'est exactement le résultat « à périmètre fixé, le carré maximise l'aire », vu dans la plaquette 1.

Réponse. a) l'autre nombre est $12 - x$ et $x(12 - x) = 32$ — b) les nombres sont 4 et 8 — c) non, $\Delta = -16 < 0$ (le produit maximal est 36).

Correction de l'exercice 14 - Le lancer du poids

a) Au départ, la distance horizontale parcourue est nulle :

$$h(0) = 2 \text{ m}$$

Le poids est donc lâché à 2 m du sol, ce qui correspond à la hauteur du bras levé de l'athlète.

b) Le coefficient $a = -0,1$ est négatif : la trajectoire admet un maximum au sommet.

$$\alpha = -\frac{1}{2 \times (-0,1)} = -\frac{1}{-0,2} = 5$$

$$\beta = h(5) = -0,1 \times 25 + 5 + 2 = -2,5 + 7 = 4,5$$

Le poids atteint sa hauteur maximale de 4,5 m après 5 m de course horizontale.

c) Toucher le sol signifie $h(x) = 0$:

$$-0,1x^2 + x + 2 = 0$$

On multiplie par -10 pour éviter les décimaux :

$$x^2 - 10x - 20 = 0$$

Avec $\Delta = 100 + 80 = 180$ et $\sqrt{180} = 6\sqrt{5} \approx 13,416$:

$$x_1 = \frac{10 - 13,416}{2} \approx -1,7 \quad x_2 = \frac{10 + 13,416}{2} \approx 11,7$$

La solution négative est écartée (le poids part vers l'avant). Le poids touche donc le sol à environ 11,7 m de l'athlète.

Le contrôle de vraisemblance. Le sommet est à $x = 5$; la retombée doit donc se produire un peu au-delà de 10 m, la trajectoire n'étant pas tout à fait symétrique puisque le lancer part de 2 m de haut et non du sol. On trouve 11,7 m : cohérent, et réaliste pour un lancer de poids de bon niveau.

Réponse. a) 2 m — b) hauteur maximale 4,5 m à 5 m de distance — c) environ 11,7 m.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète et tracé

a) Avec $a = -1$, $b = 4$ et $c = 5$:

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 16 + 20 = 36$$

Comme $\sqrt{36} = 6$ et $2a = -2$:

$$x_1 = \frac{-4 - 6}{-2} = 5 \quad x_2 = \frac{-4 + 6}{-2} = -1$$

Les racines sont -1 et 5 , d'où la forme factorisée

$$f(x) = -(x + 1)(x - 5)$$

b) $\alpha = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$ (bien la moyenne de -1 et 5 ✓) et $\beta = f(2) = -4 + 8 + 5 = 9$, donc

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 9$$

Le sommet est $S(2; 9)$ et, puisque $a < 0$, 9 est le **maximum** de f , atteint en $x = 2$.

c) Variations : la fonction croît puis décroît.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		croissante	9	décroissante	

Signe : $a < 0$, donc le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

d) On ramène l'inéquation à une comparaison à 0 :

$$f(x) \geq 5 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 \geq 5 \Leftrightarrow -x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow -x(x - 4) \geq 0$$

Le produit $-x(x - 4)$ s'annule en 0 et 4 ; le coefficient de x^2 étant négatif, il est positif entre les racines :

$$S = [0 ; 4]$$

Contrôle : $f(0) = 5$ ✓ et $f(4) = -16 + 16 + 5 = 5$ ✓ — les deux bornes donnent exactement 5, et elles sont symétriques par rapport à $\alpha = 2$.

e) Le tracé s'appuie sur quatre points : le sommet $S(2 ; 9)$, les racines $(-1 ; 0)$ et $(5 ; 0)$, et l'ordonnée à l'origine $(0 ; 5)$ — complétée par son symétrique $(4 ; 5)$. La parabole est tournée vers le bas, et le tracé se contrôle avec le tableau de signes : la courbe est sous l'axe des abscisses avant -1 et après 5 , au-dessus entre les deux.

Le bilan du chapitre. Un trinôme se lit sous trois formes, chacune donnant une information : racines, sommet, ordonnée à l'origine. De là découlent les variations, le signe, la résolution des équations et des inéquations, et la réponse à tout problème d'optimisation. Il n'y a rien d'autre à savoir — mais il faut savoir passer d'une forme à l'autre sans hésiter.

Réponse. a) racines -1 et 5 , $f(x) = -(x + 1)(x - 5)$ — b) $f(x) = -(x - 2)^2 + 9$, sommet $S(2 ; 9)$, maximum 9 — c) croissante puis décroissante ; négatif, positif, négatif — d) $S = [0 ; 4]$.