

Plaquette 4 - Signe du trinôme et inéquations

Fonctions polynômes du second degré — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Signe d'un trinôme et résolution des inéquations.

— **Règle du signe.** Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x

$\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a , sauf en $x_0 = -\frac{b}{2a}$ où il est nul

$\Delta > 0$: $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ entre elles

— **La formule à retenir en une phrase** : « du signe de a **sauf entre les racines** ».

— **Méthode de résolution d'une inéquation.** 1. tout ramener d'un côté pour se comparer à 0 ; 2. chercher les racines (discriminant ou factorisation) ; 3. dresser le tableau de signes ; 4. lire l'ensemble des solutions, en soignant les crochets (fermés si l'inégalité est large, ouverts sinon).

— **Signe d'un produit.** On dresse un tableau avec **toutes** les valeurs qui annulent l'un des facteurs, puis on multiplie les signes colonne par colonne.

— **Attention à la division par un négatif.** Diviser les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif **change le sens** de l'inégalité.

— **Le piège du carré.** $x^2 \leq 9$ ne donne pas $x \leq 3$: on écrit $x^2 - 9 \leq 0$, soit $(x - 3)(x + 3) \leq 0$, d'où $-3 \leq x \leq 3$.

Correction de l'exercice 1 - Signe d'un trinôme déjà factorisé

a) Le produit est nul si l'un des facteurs l'est : les racines sont 1 et -3 . En développant, $f(x) = x^2 + 2x - 3$, donc $a = 1 > 0$: la parabole est tournée vers le haut.

b) On applique la règle du cours : le trinôme est du signe de a , donc **positif**, à l'extérieur des racines, et **négatif** entre elles.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

On peut retrouver ce tableau en testant une valeur dans chaque intervalle :

$$f(-4) = (-5)(-1) = 5 > 0, \quad f(0) = (-1)(3) = -3 < 0, \quad f(2) = (1)(5) = 5 > 0.$$

c) Le trinôme est strictement négatif **entre les racines**, bornes exclues :

$$S =]-3; 1[$$

La phrase à retenir. « Du signe de a sauf entre les racines » suffit à remplir n'importe quel tableau de signes de trinôme. Le test d'une valeur sert de contrôle, pas de méthode.

Réponse. a) racines -3 et 1 , $a = 1 > 0$ — b) positif, négatif, positif — c) $S =]-3; 1[$.

Correction de l'exercice 2 - Un trinôme sans racine

a) Avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = 3$:

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23$$

b) Le discriminant est strictement négatif, donc le trinôme n'a aucune racine et la règle du cours s'applique :

$$\Delta < 0 \Rightarrow g(x) \text{ est du signe de } a \text{ pour tout réel } x$$

Comme $a = 2 > 0$, on conclut que $g(x) > 0$ **pour tout réel** x . Le tableau de signes ne comporte qu'une seule colonne, avec un +.

c) L'inéquation $g(x) \leq 0$ n'a donc **aucune solution** : $S = \emptyset$.

Le contrôle par la forme canonique. $\alpha = -\frac{1}{4}$ et

$$\beta = g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3 = 2,875, \text{ donc}$$

$$g(x) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 2,875 \geq 2,875 > 0 \quad \checkmark$$

L'interprétation graphique. La parabole est entièrement au-dessus de l'axe des abscisses : elle ne le coupe jamais, ce qui est exactement ce que dit $\Delta < 0$.

Réponse. a) $\Delta = -23$ — b) $g(x) > 0$ pour tout réel x — c) $S = \emptyset$.

Correction de l'exercice 3 - Un trinôme à racine double

a) On développe l'expression proposée :

$$-(x-4)^2 = -(x^2 - 8x + 16) = -x^2 + 8x - 16 = h(x)$$

L'égalité est vraie pour tout réel x . Le discriminant confirme la racine double :

$$\Delta = 64 - 4 \times (-1) \times (-16) = 64 - 64 = 0.$$

b) Pour tout réel x , $(x-4)^2 \geq 0$, donc son opposé est négatif ou nul :

$$h(x) = -(x-4)^2 \leq 0$$

Le trinôme est donc du signe de $a = -1$, c'est-à-dire **négatif partout**, et il s'annule uniquement en $x = 4$.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$h(x)$		-	0	-	

c) On lit dans le tableau :

— $h(x) < 0$ pour tout x **sauf** 4, donc $S =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$;

— $h(x) \geq 0$ uniquement en $x = 4$, donc $S = \{4\}$.

L'interprétation graphique. La parabole est tournée vers le bas et tangente à l'axe des abscisses en son sommet $(4; 0)$: elle est donc entièrement en dessous, sauf en ce point de contact.

Réponse. a) le développement redonne $-x^2 + 8x - 16$ — b) $h(x) \leq 0$, nul seulement en 4 — c) $]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ puis $\{4\}$.

Correction de l'exercice 4 - Dresser un tableau de signes complet

a) Avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -6$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

Comme $\sqrt{25} = 5$:

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

b) Le coefficient $a = 1$ est positif, donc le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) On teste une valeur dans chacun des trois intervalles :

- $f(-3) = 9 + 3 - 6 = 6 > 0$ ✓ (avant -2) ;
- $f(0) = -6 < 0$ ✓ (entre -2 et 3) ;
- $f(4) = 16 - 4 - 6 = 6 > 0$ ✓ (après 3).

Les trois signes correspondent au tableau : il est correct.

Le contrôle le moins coûteux. Calculer $f(0) = c$: son signe donne immédiatement celui du milieu du tableau. Si c est négatif et a positif, le trinôme a nécessairement deux racines encadrant 0.

Réponse. a) racines -2 et 3 — b) $+$ puis $-$ puis $+$ — c) $f(-3) = 6$, $f(0) = -6$, $f(4) = 6$: cohérent.

Correction de l'exercice 5 - Une première inéquation stricte

L'inéquation compare déjà à 0 : on peut chercher directement les racines du trinôme. Avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$:

$$\Delta = 16 - 12 = 4 \quad \text{donc} \quad x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inégalité étant **stricte**, on exclut les racines. L'ensemble des solutions est donc

$$S =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$$

Vérification. On teste une valeur de chaque côté : pour $x = 0$, $3 > 0$ ✓ ; pour $x = 2$, $4 - 8 + 3 = -1$, qui n'est pas > 0 , donc 2 est bien exclu ✓

Le symbole d'union. Deux intervalles séparés se réunissent avec $\cup$. Écrire « $x < 1$ et $x > 3$ » est faux (aucun nombre ne vérifie les deux) : il faut dire « ou », donc écrire une union.

Réponse. $S =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$.

Correction de l'exercice 6 - Une inéquation avec a négatif

Avec $a = -1$, $b = 5$ et $c = -6$:

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 - 24 = 1$$

Comme $\sqrt{\Delta} = 1$ et $2a = -2$:

$$x_1 = \frac{-5-1}{-2} = 3 \quad x_2 = \frac{-5+1}{-2} = 2$$

Les racines sont donc 2 et 3 (le dénominateur négatif les a fait apparaître dans l'ordre inverse — on les range du plus petit au plus grand pour le tableau).

Le coefficient $a = -1$ est négatif, donc le trinôme est **négatif à l'extérieur** des racines et **positif entre** elles :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2 + 5x - 6$		-	0	+	0	-	

L'inégalité est **large** ($\geq$), donc les racines sont incluses :

$$S = [2; 3]$$

Vérification. Pour $x = 2,5$: $-6,25 + 12,5 - 6 = 0,25 \geq 0$ ✓ Pour $x = 0$: -6 , qui n'est pas positif ✓

L'erreur symétrique. Avec $a < 0$, le trinôme est positif **entre** les racines : oublier de tenir compte du signe de a donne systématiquement la réponse complémentaire.

Réponse. $S = [2; 3]$.

Correction de l'exercice 7 - Une inéquation large à coefficients entiers

Avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = -2$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$

Comme $\sqrt{25} = 5$ et $2a = 4$:

$$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \quad x_2 = \frac{-3+5}{4} = 0,5$$

Le coefficient $a = 2$ est positif, donc le trinôme est négatif **entre** les racines :

x	$-\infty$		-2		0,5		$+\infty$
$2x^2 + 3x - 2$		+	0	-	0	+	

L'inégalité étant large, les racines font partie des solutions :

$$S = [-2; 0,5]$$

Vérification. Pour $x = 0$: $-2 \leq 0$ ✓ Pour $x = 1$: $2 + 3 - 2 = 3$, qui n'est pas négatif, donc 1 est bien exclu ✓

Le contrôle par la somme et le produit. Somme des racines $= -2 + 0,5 = -1,5 = -\frac{b}{a}$ ✓
Produit $= -1 = \frac{c}{a}$ ✓ Deux contrôles, dix secondes, et l'assurance de ne pas construire un tableau sur des racines fausses.

Réponse. $S = [-2; 0,5]$.

Correction de l'exercice 8 - Quand l'inéquation est toujours vraie

Dans les trois cas, on commence par le discriminant : c'est lui qui dit s'il y a des racines, donc s'il faut un tableau.

a) $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et $a = 1 > 0$, donc le trinôme est **strictement positif partout** :

$$S = \mathbb{R}$$

b) $\Delta = 1 - 4 \times (-2) \times (-5) = 1 - 40 = -39 < 0$ et $a = -2 < 0$, donc le trinôme est **strictement négatif partout**. L'inéquation demande qu'il soit positif : elle n'a aucune solution.

$$S = \emptyset$$

c) $\Delta = 36 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$: racine double $x_0 = \frac{6}{6} = 1$. Comme $a = 3 > 0$, le trinôme est positif partout et nul en 1. L'inégalité étant **large**, cette valeur est acceptée :

$$S = \mathbb{R}$$

(On peut le voir directement : $3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 \geq 0$.)

Ce que montre cet exercice. Un tableau de signes n'est nécessaire que lorsque $\Delta > 0$. Dans les deux autres cas, le signe de a répond à lui seul — et la réponse est $\mathbb{R}$ ou $\emptyset$, éventuellement privé d'un point.

Réponse. a) $S = \mathbb{R}$ — b) $S = \emptyset$ — c) $S = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9 - Le piège du carré

a) On ramène tout d'un côté pour comparer à 0, puis on factorise :

$$x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \leq 0$$

Le coefficient de x^2 est positif, donc l'expression est négative **entre** les racines -3 et 3 , bornes incluses :

$$S = [-3; 3]$$

b) La réponse « $x \leq 3$ » inclut par exemple $x = -10$. Or

$$(-10)^2 = 100 \text{ qui n'est pas } \leq 9$$

Le nombre -10 vérifie « $x \leq 3$ » mais pas l'inéquation : la réponse de l'élève est donc fausse. Son erreur est d'avoir « pris la racine carrée » des deux membres, ce qui n'est pas permis avec des nombres négatifs.

c) Même méthode :

$$x^2 > 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) > 0$$

L'expression est positive à l'extérieur des racines, bornes exclues :

$$S =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$$

soit environ $x < -2,24$ ou $x > 2,24$.

La règle générale. $x^2 \leq k$ (avec $k > 0$) donne un **intervalle centré** en 0, et $x^2 > k$ donne une **union de deux intervalles**. Il faut toujours passer par la factorisation ou le tableau de signes, jamais par une racine carrée directe.

Réponse. a) $S = [-3; 3]$ — b) $x = -10$ vérifie $x \leq 3$ mais $100 > 9$ — c) $S =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$.

Correction de l'exercice 10 - Comparer une parabole et une droite

a) La parabole est au-dessus de la droite lorsque son ordonnée est la plus grande :

$$x^2 - 2x + 3 \geq x + 1$$

On ramène tout à gauche pour comparer à 0 :

$$x^2 - 2x + 3 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Les racines de ce trinôme : $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	-	0	+	

L'inégalité étant large, les racines sont incluses :

$$S =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

b) Cela signifie que la parabole passe au-dessus de la droite avant $x = 1$ et après $x = 2$, et **en dessous** entre ces deux valeurs. C'est exactement ce que montre le graphique : la droite « traverse » la parabole en deux points, et n'est plus haute qu'entre eux.

c) Les deux courbes se coupent quand les ordonnées sont égales, c'est-à-dire pour $x = 1$ et $x = 2$ — les racines trouvées plus haut, qui sont donc les abscisses des deux points d'intersection.

La méthode générale. Comparer deux courbes, c'est étudier le **signe de la différence** de leurs expressions. Le tableau de signes donne d'un coup les intersections (les zéros) et les positions relatives (les signes).

Réponse. a) $S =]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$ — b) la parabole est en dessous entre 1 et 2 — c) en $x = 1$ et $x = 2$.

Correction de l'exercice 11 - Signe d'un produit de trois facteurs

a) Le premier facteur est une différence de carrés :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \quad \text{donc} \quad P(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)$$

b) Les facteurs s'annulent en 2, -2 et -1. On range ces valeurs dans l'ordre croissant et on étudie le signe de chaque facteur, puis celui du produit.

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x - 2$		-	-	-	-	-	0	+	
$x + 2$		-	0	+	+	+	+	+	
$x + 1$		-	-	-	0	+	+	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Chaque colonne du bas s'obtient en multipliant les trois signes du dessus : trois - donnent -, deux - et un + donnent +, et ainsi de suite.

c) On lit les intervalles où le produit est négatif ou nul :

$$S =]-\infty ; -2] \cup [-1 ; 2]$$

Vérification. Pour $x = -3$: $(9 - 4)(-2) = -10 \leq 0$ ✓ Pour $x = 0$: $(-4)(1) = -4 \leq 0$ ✓ Pour $x = -1,5$: $(2,25 - 4)(-0,5) = 0,875 > 0$, donc exclu ✓

Pourquoi un tableau et pas une règle. Avec trois facteurs, le signe alterne à chaque racine simple : on ne peut plus se contenter de « à l'extérieur des racines ». Le tableau est la seule rédaction sûre.

Réponse. a) $P(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)$ — b) -, +, -, + — c) $S =]-\infty ; -2] \cup [-1 ; 2]$.

Correction de l'exercice 12 - L'intervalle de rentabilité

a) On cherche les racines de B . Avec $a = -2$, $b = 24$ et $c = -40$:

$$\Delta = 24^2 - 4 \times (-2) \times (-40) = 576 - 320 = 256$$

Comme $\sqrt{256} = 16$ et $2a = -4$:

$$q_1 = \frac{-24 - 16}{-4} = 10 \quad q_2 = \frac{-24 + 16}{-4} = 2$$

Le coefficient $a = -2$ est négatif, donc le trinôme est positif **entre** les racines :

q	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$B(q)$		-	0	+	0	-	

L'inégalité étant large : $S = [2 ; 10]$.

b) Le domaine du problème est $[0 ; 12]$, qui contient entièrement $[2 ; 10]$: l'atelier est donc rentable pour une production comprise **entre 2 et 10 tonnes**.

c) Pour $q = 1$: $1 \notin [2 ; 10]$, donc l'atelier n'est pas rentable. Contrôle :

$B(1) = -2 + 24 - 40 = -18$, soit une perte de 1 800 €.

Pour $q = 11$: $11 \notin [2 ; 10]$ non plus. Contrôle : $B(11) = -242 + 264 - 40 = -18$, également une perte de 1 800 €.

La lecture économique. Il existe **deux** seuils : en dessous de 2 tonnes, les coûts fixes ne sont pas couverts ; au-delà de 10 tonnes, la production coûte plus qu'elle ne rapporte. La rentabilité n'est donc pas « le plus possible », mais un intervalle.

Réponse. a) $S = [2 ; 10]$ — b) entre 2 et 10 tonnes — c) non dans les deux cas ($B(1) = B(11) = -18$, soit -1 800 €).

Correction de l'exercice 13 - Une aire minimale à garantir

a) « L'aire est au moins 21 » se traduit par

$$A(x) \geq 21 \Leftrightarrow -x^2 + 10x \geq 21$$

b) On ramène tout d'un côté pour comparer à 0 :

$$-x^2 + 10x - 21 \geq 0$$

Avec $a = -1$, $b = 10$ et $c = -21$:

$$\Delta = 100 - 4 \times (-1) \times (-21) = 100 - 84 = 16$$

Comme $\sqrt{16} = 4$ et $2a = -2$:

$$x_1 = \frac{-10 - 4}{-2} = 7 \quad x_2 = \frac{-10 + 4}{-2} = 3$$

Le coefficient a est négatif, donc le trinôme est positif entre les racines :

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$-x^2 + 10x - 21$		-	0	+	0	-	

D'où $S = [3 ; 7]$, intervalle entièrement contenu dans le domaine $]0 ; 10[$.

c) La largeur doit donc être comprise **entre 3 cm et 7 cm**. Aux bornes :

— $x = 3$: rectangle 3×7 , d'aire 21 cm^2 ✓ (exactement le seuil) ;

— $x = 7$: rectangle 7×3 , même aire — c'est le même rectangle, vu dans l'autre sens.

Le graphique le confirme : la courbe passe au-dessus de la droite $y = 21$ exactement entre 3 et 7.

La symétrie du résultat. Les deux bornes 3 et 7 sont symétriques par rapport à $x = 5$, largeur du carré d'aire maximale (25 cm^2). C'est toujours le cas : une contrainte d'aire minimale donne un intervalle centré sur l'optimum.

Réponse. a) $-x^2 + 10x \geq 21$ — b) $S = [3 ; 7]$ — c) largeur entre 3 cm et 7 cm.

Correction de l'exercice 14 - Diviser par un nombre négatif

a) On divise les deux membres par -2 , ce qui **change le sens** de l'inégalité :

$$-2x^2 + 8x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

Les racines de $x^2 - 4x + 3$ sont 1 et 3 ($\Delta = 4$), et comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre les racines :

$$S = [1 ; 3]$$

b) Sans diviser : avec $a = -2$, $b = 8$ et $c = -6$,

$$\Delta = 64 - 4 \times (-2) \times (-6) = 64 - 48 = 16$$

$$x_1 = \frac{-8-4}{-4} = 3 \quad x_2 = \frac{-8+4}{-4} = 1$$

Comme $a < 0$, le trinôme est positif entre les racines :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-2x^2 + 8x - 6$		-	0	+	0	-	

D'où $S = [1 ; 3]$: le même ensemble.

c) Oui, les deux méthodes concordent. La première exige de **retourner l'inégalité** en divisant par un nombre négatif — c'est l'erreur qui donnerait $S =]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$, exactement le complémentaire de la bonne réponse.

Quelle méthode choisir. Diviser par a pour se ramener à $a = 1$ simplifie les calculs de racines ; ne pas diviser évite le retournement. Les deux sont acceptées, à condition d'être rigoureux sur le point correspondant.

Réponse. a) et b) $S = [1 ; 3]$ — c) oui ; diviser par un négatif oblige à changer le sens de l'inégalité.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : combien de temps le ballon reste-t-il haut ?

a) « À plus de 16 m » se traduit par $h(t) \geq 16$, soit

$$-5t^2 + 20t + 1 \geq 16$$

b) On ramène tout d'un côté :

$$-5t^2 + 20t + 1 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t - 15 \geq 0$$

On simplifie en divisant par -5 , ce qui **retourne** l'inégalité :

$$t^2 - 4t + 3 \leq 0$$

Les racines : $\Delta = 16 - 12 = 4$, donc $t_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $t_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Comme le coefficient de t^2 est maintenant positif, le trinôme est négatif entre les racines :

t	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$t^2 - 4t + 3$		+	0	-	0	+	

D'où $S = [1 ; 3]$, intervalle contenu dans la durée de vol $[0 ; 4,05]$.

c) Le ballon est à plus de 16 m entre la première et la troisième seconde, soit pendant

$$3 - 1 = 2 \text{ secondes}$$

d) Au bout de 0,5 s : $0,5 \notin [1 ; 3]$, donc non. Contrôle : $h(0,5) = -1,25 + 10 + 1 = 9,75$ m, effectivement moins de 16 m.

Au bout de 2 s : $2 \in [1 ; 3]$, donc oui. Contrôle : $h(2) = 21$ m — c'est même le point le plus haut de la trajectoire.

La cohérence de l'ensemble. L'intervalle $[1 ; 3]$ est centré sur $t = 2$, l'instant du sommet trouvé dans la plaquette 2 : la trajectoire étant symétrique, le ballon franchit la barre des 16 m à l'aller et la repasse au retour, à la même distance du sommet.

Réponse. a) $-5t^2 + 20t + 1 \geq 16$ — b) $S = [1 ; 3]$ — c) 2 secondes — d) non à 0,5 s (9,75 m), oui à 2 s (21 m).