

Plaquette 3 - Discriminant et racines

Fonctions polynômes du second degré — Première générale

Exercices

Méthode

Quand aucune factorisation ne se voit, le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ tranche : son signe donne le nombre de racines, et sa valeur les fournit. La démarche est toujours la même — écrire l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, identifier a , b , c **avec leurs signes**, calculer Δ , conclure. Les erreurs sont presque toujours des erreurs de signe : $-4ac$ devient $+$ quand c est négatif, et le $-b$ de la formule des racines devient $+$ quand b est négatif. Cette plaquette insiste donc sur la rédaction et les contrôles : la somme des racines doit valoir $-\frac{b}{a}$, leur moyenne doit être l'abscisse du sommet, et chaque racine trouvée se vérifie en la remplaçant dans l'équation.

Exercice 1 - Calculer un discriminant et conclure

Pour chacun des trinômes suivants, calculer le discriminant et en déduire le nombre de racines, sans les calculer.

- a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$
- b) $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$
- c) $h(x) = 2x^2 + x + 3$
- d) $k(x) = -x^2 + 5x + 6$

Exercice 2 - Une première équation à deux racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$, puis vérifier les solutions trouvées.

Exercice 3 - Quand le coefficient a n'est pas 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

Exercice 4 - Le cas du discriminant nul

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 6x + 9 = 0$.
- b) Factoriser le trinôme $x^2 - 6x + 9$.
- c) Que peut-on dire de la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses ?

Exercice 5 - Une équation sans solution

- a) Montrer que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a aucune solution réelle.
- b) Retrouver ce résultat en mettant $x^2 + x + 1$ sous forme canonique.
- c) Qu'en déduit-on pour le signe de $x^2 + x + 1$?

Exercice 6 - Un coefficient a négatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-3x^2 + 2x + 1 = 0$, puis factoriser le trinôme $-3x^2 + 2x + 1$.

Exercice 7 - Des racines irrationnelles

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$, en donnant les valeurs exactes des solutions.
- b) Donner une valeur approchée de chaque solution, au centième.
- c) Vérifier que la somme des solutions vaut 4.

Exercice 8 - Factoriser grâce au discriminant

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

- a) Déterminer les racines de f .
- b) En déduire la forme factorisée de f .
- c) Vérifier la factorisation en développant.

Exercice 9 - Mettre l'équation en forme d'abord

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- a) $x^2 = 5x - 4$
- b) $3x^2 + 2 = 7x$

Exercice 10 - Une équation avec un carré à développer

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x + 1)^2 = 3x + 7$.

Exercice 11 - Déterminer un paramètre

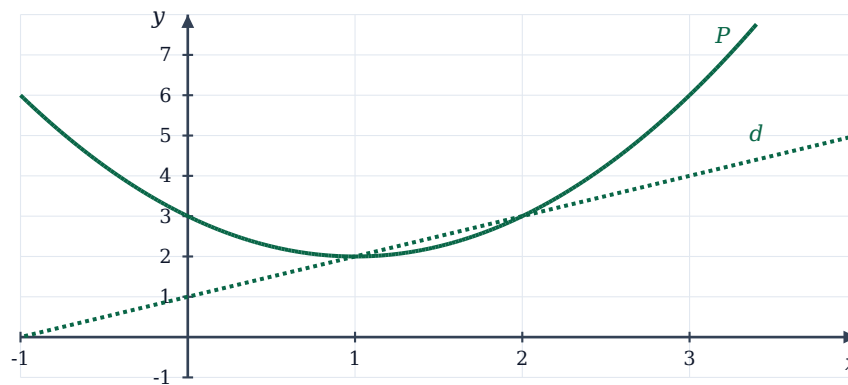
Soit m un nombre réel. On considère l'équation $x^2 + 6x + m = 0$.

- a) Exprimer le discriminant en fonction de m .
- b) Déterminer m pour que l'équation admette une racine double, puis donner cette racine.
- c) Pour quelles valeurs de m l'équation n'a-t-elle aucune solution ?

Exercice 12 - Intersection d'une parabole et d'une droite

Dans un repère, P est la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 3$ et d la droite d'équation $y = x + 1$.

- Montrer que les abscisses des points communs à P et d sont les solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection.
- Combien de points communs possède la droite d'équation $y = x - 3$ avec P ?



La parabole $y = x^2 - 2x + 3$ et la droite $y = x + 1$.

Exercice 13 - Les dimensions d'un terrain

Un terrain rectangulaire a une longueur qui dépasse sa largeur de 3 m, et une aire de 40 m². On note x sa longueur, en mètres.

- Exprimer sa largeur en fonction de x , puis traduire l'aire par une équation.
- Résoudre cette équation et en déduire les dimensions du terrain.
- Pourquoi une des deux solutions de l'équation doit-elle être écartée ?

Exercice 14 - Quand le ballon retombe-t-il ?

La hauteur d'un ballon, en mètres, t secondes après la frappe, est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$.

- Traduire par une équation la question « à quel instant le ballon touche-t-il le sol ? ».
- Résoudre cette équation et donner l'instant cherché, arrondi au centième de seconde.
- Que représente l'autre solution ? Pourquoi est-elle écartée ?

Exercice 15 - Synthèse : quatre formes pour un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

- Calculer le discriminant et déterminer les racines de f .
- En déduire la forme factorisée de f .
- Déterminer la forme canonique de f et le sommet de la parabole.
- Vérifier que l'abscisse du sommet est la moyenne des racines.

e) Résoudre l'inéquation $f(x) < -8$ à l'aide de la forme factorisée d'une autre expression.