

Plaquette 2 - Forme canonique, sommet et variations

Fonctions polynômes du second degré — Première générale

Exercices

Méthode

La forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ répond d'un coup à trois questions : où est le **sommet**, quel est l'**extremum** de la fonction, et sur quels intervalles elle croît ou décroît. Il n'y a qu'un calcul à retenir, celui de $\alpha = -\frac{b}{2a}$; β s'obtient ensuite en calculant simplement $f(\alpha)$. Le **signe de a** commande tout le reste : parabole tournée vers le haut et minimum si $a > 0$, vers le bas et maximum si $a < 0$. Cette plaquette enchaîne les deux gestes — mettre sous forme canonique, puis dresser le tableau de variations — et les applique aux problèmes d'optimisation, qui sont la raison d'être du chapitre : aire maximale, hauteur maximale, bénéfice maximal.

Exercice 1 - Lire le sommet sur une forme canonique

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les coordonnées du sommet de la parabole, puis préciser si la fonction admet un minimum ou un maximum, et sa valeur.

- a) $f(x) = (x - 4)^2 + 3$
- b) $g(x) = -2(x + 1)^2 + 7$
- c) $h(x) = 3(x - 2)^2$
- d) $k(x) = 5 - (x - 6)^2$

Exercice 2 - Calculer les coordonnées du sommet

Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentant chacune des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$
- b) $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$
- c) $h(x) = -3x^2 + 12x$

Exercice 3 - Mettre sous forme canonique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 11$.

- a) Calculer α et β , puis écrire la forme canonique de f .
- b) Vérifier le résultat en développant la forme obtenue.
- c) En déduire le minimum de f et la valeur en laquelle il est atteint.

Exercice 4 - Forme canonique avec un coefficient a différent de 1

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 12x + 7$.

- a) Déterminer la forme canonique de g .
- b) Vérifier par développement.

c) Donner le sommet de la parabole et l'extremum de g .

Exercice 5 - La méthode du carré, sans formule

Compléter chaque égalité pour faire apparaître un carré, sans utiliser la formule $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

a) $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - \dots$

b) $x^2 - 10x + 2 = (x - 5)^2 + \dots$

c) $x^2 + 2x - 8 = (x + 1)^2 + \dots$

Exercice 6 - Tableau de variations avec a positif

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

a) Déterminer le sommet de la parabole.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire le signe de la comparaison entre $f(x)$ et -5 pour tout réel x .

Exercice 7 - Tableau de variations avec a négatif

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 4$.

a) Déterminer le sommet de la parabole et l'extremum de g .

b) Dresser le tableau de variations de g .

c) L'équation $g(x) = 8$ admet-elle des solutions ? Justifier sans calcul.

Exercice 8 - Minimum ou maximum ?

Pour chaque fonction, dire sans mettre sous forme canonique si elle admet un minimum ou un maximum, puis calculer cet extremum et la valeur en laquelle il est atteint.

a) $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$

b) $g(x) = -0,5x^2 + 3x$

c) $h(x) = -x^2 - 2x + 5$

Exercice 9 - Comparer des images grâce aux variations

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 2$.

a) Déterminer l'abscisse du sommet et le sens de variation de f .

b) Comparer $f(0)$ et $f(2)$ sans les calculer.

c) Comparer $f(4)$ et $f(7)$ sans les calculer.

d) Comparer $f(1)$ et $f(5)$. Justifier autrement que par les variations.

Exercice 10 - Retrouver un trinôme à partir de son sommet

Une parabole P a pour sommet $S(1 ; -4)$ et passe par le point $A(3 ; 0)$.

- Écrire la forme canonique de la fonction f représentée par P , en fonction du coefficient a .
- Déterminer a en utilisant le point A .
- En déduire la forme développée de f , puis ses racines.

Exercice 11 - L'enclos contre un mur

Un éleveur dispose de 60 m de grillage pour délimiter un enclos rectangulaire **appuyé contre un mur** : le mur constitue l'un des grands côtés, et seuls les trois autres côtés sont grillagés. On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

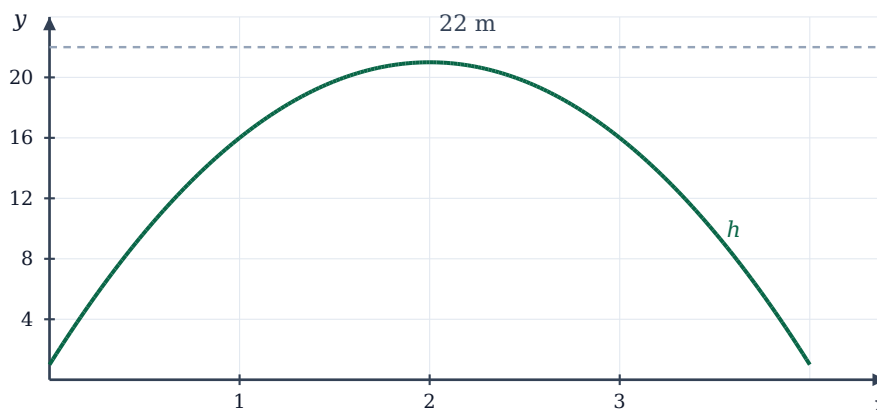
- Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x , et donner les valeurs possibles de x .
- Montrer que l'aire de l'enclos est $A(x) = -2x^2 + 60x$.
- Déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximale, et cette aire.

Exercice 12 - La trajectoire d'un ballon

Un ballon est frappé depuis le sol. Sa hauteur, en mètres, t secondes après la frappe, est modélisée par

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1$$

- Quelle est la hauteur du ballon au moment de la frappe ?
- Déterminer l'instant où le ballon atteint sa hauteur maximale, et cette hauteur.
- Le ballon peut-il passer au-dessus d'un mur de 22 m ? Justifier.



La trajectoire modélisée du ballon et la hauteur de 22 m.

Exercice 13 - Le bénéfice maximal d'un atelier

Le bénéfice, en centaines d'euros, réalisé par un atelier produisant q tonnes d'un produit est

$$B(q) = -2q^2 + 24q - 40 \quad \text{pour } 0 \leq q \leq 12$$

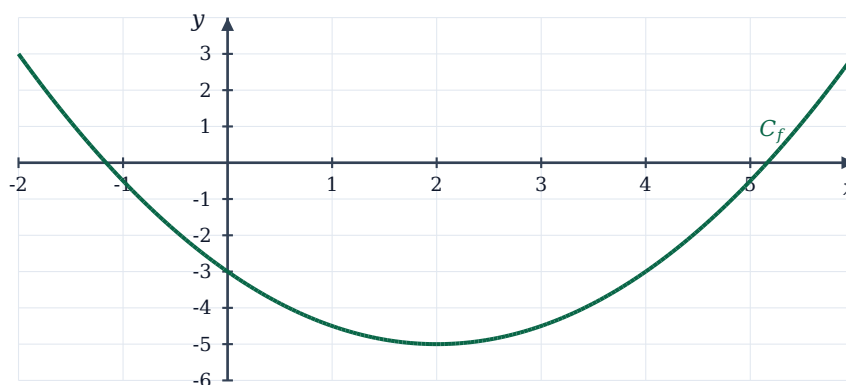
- Calculer $B(2)$ et $B(10)$. Que remarque-t-on ?

- b) Déterminer la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximal, et ce bénéfice en euros.
- c) Vérifier que $B(q) = -2(q - 2)(q - 10)$ et interpréter les nombres 2 et 10.

Exercice 14 - Lire un sommet sur une parabole

La parabole ci-dessous représente une fonction f du second degré.

- a) Lire les coordonnées du sommet et en déduire la forme canonique de f , en fonction de a .
- b) La courbe passe par le point de coordonnées $(0; -3)$. En déduire a .
- c) Donner la forme développée de f , puis ses racines, et vérifier la cohérence avec le graphique.



La parabole représentant f .

Exercice 15 - Synthèse : étude complète d'un trinôme

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$.

- a) Déterminer la forme canonique de f .
- b) Dresser le tableau de variations de f et donner son extremum.
- c) Résoudre l'équation $f(x) = 5$.
- d) Les deux solutions trouvées en c) sont-elles symétriques par rapport à l'axe de la parabole ? Justifier.
- e) L'équation $f(x) = -10$ a-t-elle des solutions ?