

Plaquette 5 - Parabole et problèmes de synthèse

Fonctions polynômes du second degré — Première générale

Exercices

Méthode

Dernière plaquette : on relie tout. Une parabole se trace avec quatre informations et pas une de plus — le **sens** donné par le signe de a , le **sommet** donné par la forme canonique, les **racines** données par le discriminant, et l'**ordonnée à l'origine** $f(0) = c$. Réciproquement, un graphique permet de retrouver l'expression : sommet plus un point, ou racines plus un point. La seconde moitié de la plaquette est consacrée aux problèmes complets, ceux du bac : on modélise une situation par un trinôme, on cherche un **optimum** (forme canonique) puis un **intervalle** répondant à une contrainte (tableau de signes), et on conclut par une phrase en français, avec les unités.

Exercice 1 - Tracer une parabole point par point

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Déterminer le sommet de la parabole, ses racines et son ordonnée à l'origine.
- Recopier et compléter le tableau de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?

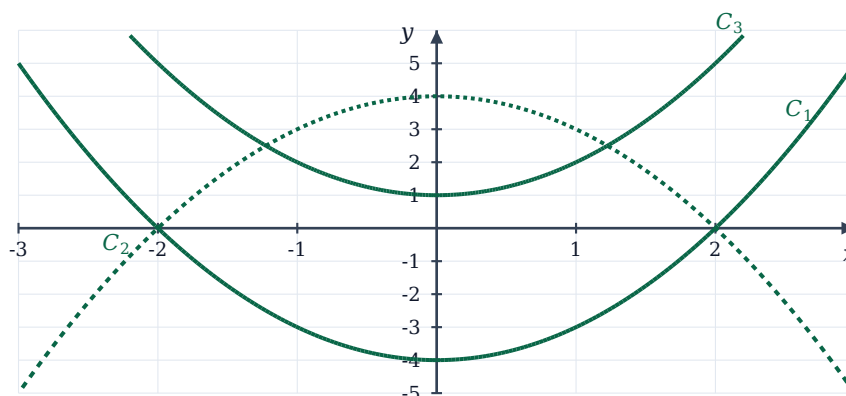
- Tracer la parabole dans un repère, en plaçant d'abord le sommet et les racines.

Exercice 2 - Associer chaque parabole à son expression

Trois paraboles sont tracées ci-dessous. Elles représentent, dans un ordre inconnu, les fonctions définies par

$$f(x) = x^2 - 4 \quad g(x) = -x^2 + 4 \quad h(x) = x^2 + 1$$

- Attribuer sa courbe à chaque fonction, en justifiant par deux arguments distincts.
- Donner les racines de chacune des trois fonctions.

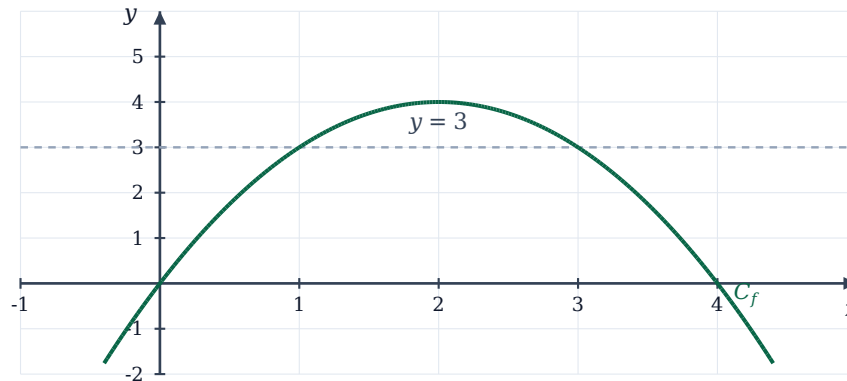


Trois paraboles dans un même repère.

Exercice 3 - Tout lire sur un graphique

La parabole ci-dessous représente une fonction f du second degré.

- Lire les coordonnées du sommet, les racines et l'ordonnée à l'origine.
- Donner le signe de a et dresser le tableau de variations de f .
- Résoudre graphiquement $f(x) \geq 0$, puis $f(x) \leq 3$.



La parabole de f et la droite d'équation $y = 3$.

Exercice 4 - Retrouver un trinôme à partir de ses racines

Une parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 , et l'axe des ordonnées au point $(0; -6)$.

- Écrire la forme factorisée de la fonction f associée, en fonction du coefficient a .
- Déterminer a .
- Donner la forme développée, puis le sommet de la parabole.

Exercice 5 - Décrire une parabole sans la tracer

Pour chacune des fonctions suivantes, décrire la parabole en trois points : le sens (vers le haut ou vers le bas), le sommet, et le nombre d'intersections avec l'axe des abscisses.

- $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$
- $g(x) = -(x + 2)^2$
- $h(x) = 0,5(x - 1)^2 - 2$

Exercice 6 - Intersections avec les deux axes

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 12$.

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
- Déterminer les coordonnées de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.
- Déterminer le sommet, puis vérifier la cohérence de l'ensemble.

Exercice 7 - Une parabole tangente à l'axe des abscisses

Soit m un réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = x^2 - 2x + m$.

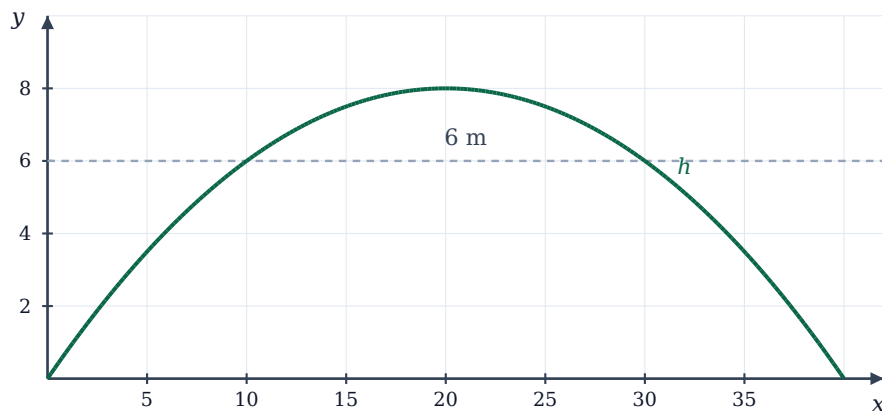
- Déterminer m pour que la parabole soit tangente à l'axe des abscisses.
- Donner alors le point de tangence.
- Pour $m = 5$, la parabole coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier de deux façons.

Exercice 8 - L'arche d'un pont

L'arche d'un pont a la forme d'une parabole. Elle mesure 40 m de portée au sol et 8 m de hauteur maximale. En plaçant l'origine du repère à la base gauche de l'arche, sa hauteur en un point d'abscisse x (en mètres) est

$$h(x) = -0,02x^2 + 0,8x \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 40$$

- Vérifier que ce modèle est cohérent avec les données de l'énoncé.
- Calculer la hauteur de l'arche à 10 m de la base gauche.
- Déterminer la largeur de l'arche à une hauteur de 6 m.



L'arche du pont, de portée 40 m et de hauteur maximale 8 m.

Exercice 9 - La section d'une gouttière

On fabrique une gouttière en pliant à angle droit les deux bords d'une bande de tôle de 30 cm de largeur. On note x la hauteur, en centimètres, de chacun des deux bords relevés.

- Exprimer la largeur du fond de la gouttière en fonction de x , et donner le domaine de x .
- Montrer que l'aire de la section est $A(x) = -2x^2 + 30x$.
- Déterminer la hauteur de pliage qui rend cette aire maximale, et l'aire obtenue.
- Pour quelles hauteurs de pliage l'aire de la section est-elle au moins de 100 cm² ?

Exercice 10 - Recette, coût et bénéfice

Un atelier vend chaque unité 15 €. Produire q unités coûte $C(q) = q^2 + 3q + 20$ euros, pour $0 \leq q \leq 14$.

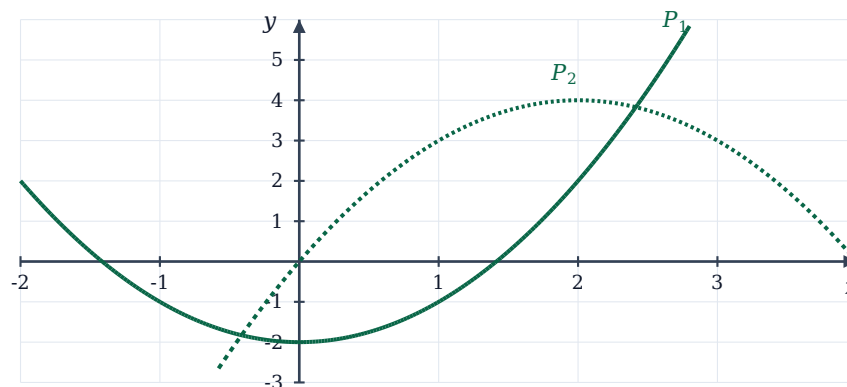
- Exprimer la recette $R(q)$, puis le bénéfice $B(q) = R(q) - C(q)$.

- b) Déterminer l'intervalle des quantités pour lesquelles l'atelier réalise un bénéfice positif.
- c) Déterminer la quantité qui rend le bénéfice maximal, et ce bénéfice.

Exercice 11 - Deux paraboles qui se coupent

Dans un repère, P_1 a pour équation $y = x^2 - 2$ et P_2 pour équation $y = -x^2 + 4x$.

- a) Montrer que les abscisses des points communs vérifient $x^2 - 2x - 1 = 0$.
- b) Résoudre cette équation et donner les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection.
- c) Donner une valeur approchée au centième de chacune de ces abscisses.



Les deux paraboles $y = x^2 - 2$ et $y = -x^2 + 4x$.

Exercice 12 - Le prix qui maximise la recette

Un cinéma vend actuellement 200 places à 8 € la place. Une étude montre que chaque réduction de 0,50 € sur le prix attire 20 spectateurs de plus. On note x le nombre de réductions de 0,50 € appliquées.

- a) Exprimer le prix de la place et le nombre de spectateurs en fonction de x .
- b) Montrer que la recette est $R(x) = -10x^2 + 60x + 1\,600$.
- c) Déterminer le nombre de réductions à appliquer pour que la recette soit maximale, puis le prix de la place et la recette correspondants.

Exercice 13 - Deux nombres, une somme, un produit

On cherche deux nombres dont la somme est 12 et le produit 32.

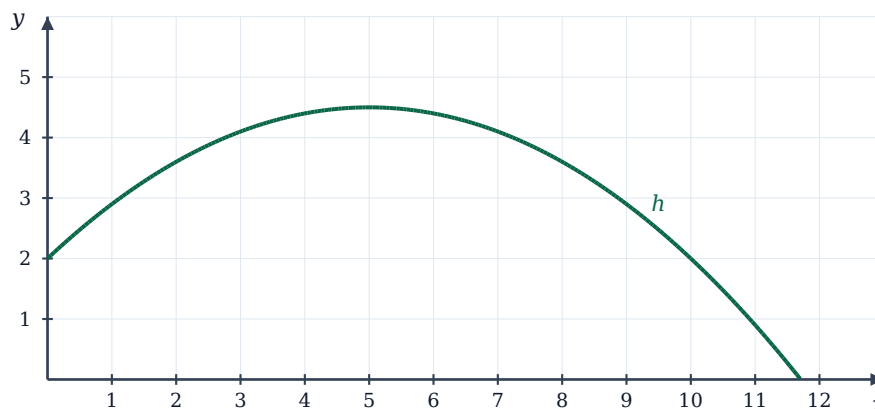
- a) En notant x l'un des deux nombres, exprimer l'autre, puis traduire la condition sur le produit par une équation.
- b) Résoudre cette équation et donner les deux nombres.
- c) Existe-t-il deux nombres de somme 12 et de produit 40 ? Justifier.

Exercice 14 - Le lancer du poids

Un athlète lance un poids. Sa hauteur, en mètres, en fonction de la distance horizontale x parcourue, en mètres, est modélisée par

$$h(x) = -0,1x^2 + x + 2$$

- a) De quelle hauteur le poids est-il lâché ?
- b) Déterminer la distance à laquelle le poids atteint sa hauteur maximale, et cette hauteur.
- c) À quelle distance de l'athlète le poids touche-t-il le sol ? Donner le résultat arrondi au décimètre.



La trajectoire modélisée du poids.

Exercice 15 - Synthèse : étude complète et tracé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

- a) Déterminer les racines de f et sa forme factorisée.
- b) Déterminer la forme canonique, le sommet et l'extremum de f .
- c) Dresser le tableau de variations, puis le tableau de signes de f .
- d) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 5$.
- e) Tracer la parabole en utilisant les éléments trouvés.