

Plaquette 4 - Signe du trinôme et inéquations

Fonctions polynômes du second degré — Première générale

Exercices

Méthode

Une fois les racines connues, le signe du trinôme se résume en une phrase : **il est du signe de a partout, sauf entre les racines**. Et s'il n'y a pas de racine, il est du signe de a sur tout $\mathbb{R}$. Résoudre une inéquation du second degré, c'est donc trois gestes : tout ramener d'un côté pour comparer à 0, chercher les racines, dresser le tableau de signes. Deux pièges reviennent constamment : comparer à un nombre au lieu de comparer à 0 (on ne peut rien conclure de $x^2 - 3x \geq 2$ tel quel), et croire que $x^2 \leq 9$ donne $x \leq 3$ — alors que -10 vérifierait cette conclusion sans vérifier l'inéquation. Le tableau de signes est la seule rédaction qui met à l'abri.

Exercice 1 - Signe d'un trinôme déjà factorisé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)(x + 3)$.

- Donner les racines de f et le signe de son coefficient a .
- Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
- En déduire l'ensemble des réels x tels que $f(x) < 0$.

Exercice 2 - Un trinôme sans racine

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + x + 3$.

- Calculer le discriminant de g .
- En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre l'inéquation $g(x) \leq 0$.

Exercice 3 - Un trinôme à racine double

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2 + 8x - 16$.

- Vérifier que $h(x) = -(x - 4)^2$ pour tout réel x .
- En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre $h(x) < 0$ puis $h(x) \geq 0$.

Exercice 4 - Dresser un tableau de signes complet

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 6$.

- Déterminer les racines de f .
- Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Contrôler le tableau en calculant $f(-3)$, $f(0)$ et $f(4)$.

Exercice 5 - Une première inéquation stricte

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Exercice 6 - Une inéquation avec a négatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$.

Exercice 7 - Une inéquation large à coefficients entiers

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$.

Exercice 8 - Quand l'inéquation est toujours vraie

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- a) $x^2 + x + 1 > 0$
- b) $-2x^2 + x - 5 > 0$
- c) $3x^2 - 6x + 3 \geq 0$

Exercice 9 - Le piège du carré

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leq 9$.
- b) Un élève répond « $x \leq 3$ ». Donner un contre-exemple qui montre que sa réponse est fausse.
- c) Résoudre $x^2 > 5$, en donnant les valeurs exactes des bornes.

Exercice 10 - Comparer une parabole et une droite

Dans un repère, P est la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 3$ et d la droite d'équation $y = x + 1$.

- a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels P est **au-dessus** de d .
- b) Interpréter le résultat sur le graphique de la plaquette précédente.
- c) Pour quelles valeurs de x les deux courbes se coupent-elles ?

Exercice 11 - Signe d'un produit de trois facteurs

Soit $P(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.

- a) Factoriser complètement $P(x)$.
- b) Dresser le tableau de signes de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- c) Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Exercice 12 - L'intervalle de rentabilité

Le bénéfice, en centaines d'euros, d'un atelier produisant q tonnes est $B(q) = -2q^2 + 24q - 40$, pour $0 \leq q \leq 12$.

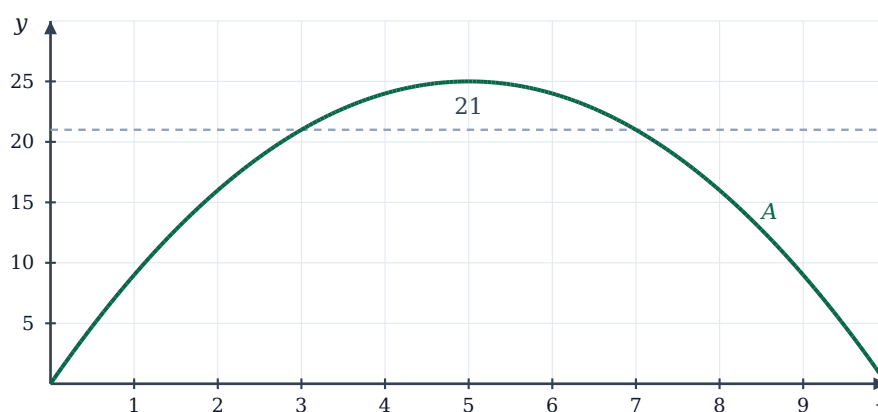
- a) Résoudre l'inéquation $B(q) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

- b) En tenant compte du domaine, donner l'intervalle des quantités pour lesquelles l'atelier est rentable.
- c) L'atelier est-il rentable en produisant 1 tonne ? 11 tonnes ?

Exercice 13 - Une aire minimale à garantir

Un rectangle a un périmètre de 20 cm. On note x sa largeur, en centimètres, avec $0 < x < 10$, si bien que son aire vaut $A(x) = -x^2 + 10x$.

- a) Traduire par une inéquation la condition « l'aire est au moins égale à 21 cm² ».
- b) Résoudre cette inéquation.
- c) En déduire les largeurs possibles, et vérifier avec les dimensions extrêmes.



L'aire du rectangle en fonction de sa largeur, et le seuil de 21 cm².

Exercice 14 - Diviser par un nombre négatif

- a) Résoudre $-2x^2 + 8x - 6 \geq 0$ en divisant d'abord les deux membres par -2 .
- b) Résoudre la même inéquation sans diviser, en utilisant directement le tableau de signes.
- c) Les deux méthodes donnent-elles le même résultat ? Quelle précaution la première exige-t-elle ?

Exercice 15 - Synthèse : combien de temps le ballon reste-t-il haut ?

La hauteur d'un ballon, en mètres, t secondes après la frappe, est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. Le ballon reste en l'air de $t = 0$ à environ $t = 4,05$ s.

- a) Traduire par une inéquation la question « pendant combien de temps le ballon est-il à plus de 16 m de hauteur ? ».
- b) Résoudre cette inéquation.
- c) En déduire la durée pendant laquelle le ballon est à plus de 16 m.
- d) Le ballon est-il à plus de 16 m au bout de 0,5 s ? Au bout de 2 s ?