

Plaquette 4 – Évolution réciproque

Pourcentages et taux d'évolution — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Revenir à la valeur de départ.

$$V_D = \frac{V_A}{CM}$$

Coefficient de l'évolution réciproque. C'est l'**inverse** du coefficient initial :

$$CM' = \frac{1}{CM} \quad \text{et} \quad CM \times CM' = 1$$

Taux réciproque. Si $x = \frac{t}{100}$, alors

$$t' = \left(\frac{1}{1+x} - 1 \right) \times 100 = \frac{-t}{100+t} \times 100$$

Évolution	Réciproque
+25 %	−20 %
−20 %	+25 %
+100 %	−50 %
−50 %	+100 %
+10 %	−9,09 %
−10 %	+11,11 %

Les situations classiques.

On connaît	On cherche	Opération
prix soldé et remise	prix initial	diviser par le coefficient de remise
prix TTC et taux de TVA	prix HT	diviser par $1 + \frac{TVA}{100}$
salaire net et taux de charges	salaire brut	diviser par le coefficient de retenue
valeur actuelle et évolutions passées	valeur d'origine	diviser par le produit des coefficients

Le contrôle, toujours possible. On remultiplie : la valeur de départ trouvée doit redonner la valeur d'arrivée de l'énoncé.

△ Après une hausse de 40 %, retirer 40 % donne $1,4 \times 0,6 = 0,84$, soit une perte de 16 % : on ne revient pas au point de départ.

Correction de l'exercice 1 - Quatre valeurs de départ

La formule du cours.

$$V_D = \frac{V_A}{CM}$$

a) $\frac{920}{1,15} = 800.$

$$b) \frac{1\,000}{0,80} = 1\,250.$$

$$c) \frac{861}{1,025} = 840.$$

$$d) \frac{275}{0,55} = 500.$$

Les contrôles, en une ligne chacun. $800 \times 1,15 = 920 \checkmark$; $1\,250 \times 0,8 = 1\,000 \checkmark$; $840 \times 1,025 = 861 \checkmark$; $500 \times 0,55 = 275 \checkmark$.

Le sens à vérifier avant de calculer. Après une hausse, la valeur de départ est plus **petite** que la valeur d'arrivée (a, c) ; après une baisse, elle est plus **grande** (b, d). Un résultat qui contredit ce sens signale qu'on a multiplié au lieu de diviser.

L'erreur à ne pas faire au d). Ajouter 45 % à 275 donnerait 398,75, ce qui est faux : la baisse de 45 % portait sur 500, pas sur 275.

Réponse. a) 800 — b) 1 250 — c) 840 — d) 500.

Correction de l'exercice 2 - Annuler une hausse

Le principe. Annuler une évolution, c'est appliquer le coefficient **inverse** :

$$CM' = \frac{1}{CM}$$

a) La hausse de 25 % a pour coefficient 1,25, donc

$$CM' = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

soit $t' = (0,8 - 1) \times 100 = -20$: une baisse de 20 %.

b) Pour +60 % : $\frac{1}{1,60} = 0,625$, soit $t' = -37,5$ %.

c) Contrôles : $1,25 \times 0,8 = 1 \checkmark$ et $1,6 \times 0,625 = 1 \checkmark$. Le produit d'une évolution et de sa réciproque vaut toujours 1, c'est-à-dire « aucune évolution ».

Pourquoi le taux réciproque est plus petit. La baisse s'applique à une valeur **déjà augmentée** : sur un prix de 100 € devenu 125 €, il faut retirer 25 €, ce qui représente 20 % de 125 et non 25 %. Plus la hausse initiale est forte, plus l'écart entre les deux taux se creuse.

Réponse. a) -20 % — b) -37,5 % — c) $1,25 \times 0,8 = 1$ et $1,6 \times 0,625 = 1$.

Correction de l'exercice 3 - Annuler une baisse

La formule du cours, avec le coefficient inverse :

$$CM' = \frac{1}{CM}$$

a) $\frac{1}{0,80} = 1,25$, soit une hausse de 25 %.

b) $\frac{1}{0,40} = 2,5$, soit une hausse de 150 % : il faut multiplier par 2,5 pour effacer une perte de 60 %.

c) $\frac{1}{0,50} = 2$, soit une hausse de 100 % — il faut **doubler** ce qui reste.

La leçon de ces trois cas. Pour une baisse, le taux réciproque est toujours **plus grand** en valeur absolue, et l'écart explose quand la baisse s'approche de 100 % : après -90 %, il faudrait +900 % pour revenir au point de départ.

Le réflexe de contrôle. $0,8 \times 1,25 = 1 \checkmark$, $0,4 \times 2,5 = 1 \checkmark$, $0,5 \times 2 = 1 \checkmark$: deux

coefficients réciproques ont pour produit 1, ce qui se vérifie sans calculatrice.

Réponse. a) +25 % — b) +150 % — c) +100 %.

Correction de l'exercice 4 - Un tableau de réciproques

La méthode. Pour chaque colonne, on prend l'inverse du coefficient :

$$CM' = \frac{1}{CM} \quad t' = (CM' - 1) \times 100$$

— +10 % : $\frac{1}{1,1} \approx 0,909091$, soit -9,09 % ;

— -10 % : $\frac{1}{0,9} \approx 1,111111$, soit +11,11 % ;

— +100 % : $\frac{1}{2} = 0,5$, soit -50 % ;

— -75 % : $\frac{1}{0,25} = 4$, soit +300 %.

Ce que le tableau met en évidence. Les deux premières colonnes montrent que +10 % et -10 % n'ont pas des réciproques opposées : -9,09 % d'un côté, +11,11 % de l'autre. Une baisse est toujours plus difficile à rattraper qu'une hausse à effacer.

La formule directe, utile pour aller vite :

$$t' = \frac{-t}{100 + t} \times 100$$

Pour $t = 10$: $\frac{-10}{110} \times 100 \approx -9,09 \checkmark$. Pour $t = -75$: $\frac{75}{25} \times 100 = 300 \checkmark$.

Réponse. -9,09 % — +11,11 % — -50 % — +300 %.

Correction de l'exercice 5 - Le prix avant les soldes

a) Le prix soldé est la valeur d'arrivée, la remise de 30 % donne le coefficient 0,70 :

$$V_D = \frac{V_A}{CM} = \frac{63}{0,70} = 90$$

Le prix initial était de 90 €. **Contrôle** : $90 \times 0,7 = 63 \checkmark$.

b) La remise vaut $90 - 63 = 27$ €.

c) Rapportée au prix **soldé**, la remise représente

$$\frac{27}{63} \approx 0,4286$$

soit environ 42,86 % — c'est aussi le taux de la hausse nécessaire pour revenir de 63 € à 90 €, puisque $\frac{1}{0,7} \approx 1,4286$.

Les deux pourcentages à distinguer. La remise vaut 30 % du prix **initial** et environ 42,9 % du prix **payé** : même montant de 27 €, deux bases différentes. Les publicités choisissent évidemment la première formulation.

Réponse. a) 90 € — b) 27 € — c) environ 42,86 % du prix soldé.

Correction de l'exercice 6 - Du prix TTC au prix hors taxes

a) Le prix TTC s'obtient en multipliant le prix hors taxes par 1,20, donc on divise :

$$P_{HT} = \frac{158,40}{1,20} = 132$$

Le prix hors taxes est de 132 €.

b) La TVA vaut $158,40 - 132 = 26,40$ €. Contrôle : $132 \times 0,20 = 26,40$ ✓ — la TVA représente bien 20 % du prix **hors taxes**.

c) Retirer 20 % du prix TTC donnerait $158,40 \times 0,8 = 126,72$ €, soit 5,28 € de moins que le vrai prix hors taxes. Le taux correct est celui de l'évolution réciproque :

$$\frac{1}{1,20} \approx 0,8333$$

soit une baisse d'environ 16,67 %. Autrement dit, la TVA représente 20 % du HT mais seulement 16,67 % du TTC.

Le repère professionnel. Les commerçants multiplient par 0,8333 (ou divisent par 1,2) pour passer du TTC au HT à 20 % ; à 5,5 %, le diviseur est 1,055.

Réponse. a) 132 € — b) 26,40 € — c) faux : il faut baisser d'environ 16,67 %, soit diviser par 1,2.

Correction de l'exercice 7 - L'erreur à corriger

a) Après la baisse : $250 \times 0,60 = 150$ €. Après une hausse de 40 % : $150 \times 1,40 = 210$ €. On n'a pas retrouvé 250 € mais 210 €. Le coefficient global vaut

$$0,60 \times 1,40 = 0,84$$

soit une perte de 16 %.

b) Il faut le coefficient inverse de 0,60 :

$$\frac{1}{0,60} \approx 1,6667$$

soit une hausse d'environ 66,67 %. Contrôle : $150 \times 1,6667 \approx 250$ ✓.

c) Parce que les deux taux ne s'appliquent pas à la même base : la baisse de 40 % porte sur 250 € (elle retire 100 €), tandis que la hausse doit porter sur 150 € et doit pourtant rendre les mêmes 100 € — ce qui fait bien davantage que 40 % de 150 €.

La règle à retenir définitivement. Pour défaire une évolution, on divise par son coefficient. Le taux réciproque se calcule, il ne se devine pas — et il n'est jamais l'opposé du taux initial (sauf si celui-ci est nul).

Réponse. a) on obtient 210 € au lieu de 250 € — b) environ +66,67 % — c) les deux taux portent sur des bases différentes.

Correction de l'exercice 8 - Du salaire net au salaire brut

a) Le salaire net s'obtient en multipliant le brut par $1 - 0,22 = 0,78$. On divise donc :

$$\text{brut} = \frac{\text{net}}{0,78} = \frac{1\,794}{0,78} = 2\,300$$

Le salaire brut est de 2 300 €. **Contrôle** : $2\,300 \times 0,78 = 1\,794$ ✓.

b) Les cotisations valent $2\,300 - 1\,794 = 506$ €. Contrôle : $2\,300 \times 0,22 = 506$ ✓.

c) Rapportées au net :

$$\frac{506}{1\,794} \approx 0,2821$$

soit environ 28,21 % du salaire net.

Les deux lectures d'un même prélèvement. 22 % du brut, 28,2 % du net : le montant est le même (506 €), la base change. C'est exactement la situation de la TVA, qui vaut 20 % du HT et 16,67 % du TTC.

Le calcul direct de ce pourcentage. $\frac{0,22}{0,78} \approx 0,2821$: il ne dépend pas du salaire, seulement du taux de cotisation.

Réponse. a) 2 300 € — b) 506 € — c) environ 28,21 % du net.

Correction de l'exercice 9 - Défaire deux évolutions

a) Les coefficients se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = 1,10 \times 0,95 = 1,045$$

soit une hausse globale de 4,5 %.

b) Il faut le coefficient inverse du coefficient global :

$$\frac{1}{1,045} \approx 0,956938$$

soit une baisse d'environ 4,31 %. Une seule évolution suffit à défaire les deux précédentes, à condition de partir du coefficient **global**.

c) On divise la valeur actuelle par le coefficient global :

$$V_D = \frac{41,80}{1,045} = 40$$

Le tarif d'origine était de 40 €. **Contrôle** : $40 \times 1,1 = 44$ €, puis $44 \times 0,95 = 41,80$ € ✓.

La méthode à retenir. Pour remonter à travers plusieurs évolutions, on ne les défait pas une par une : on calcule d'abord le coefficient global, puis on divise une seule fois. Moins d'étapes, donc moins d'erreurs d'arrondi.

Réponse. a) 1,045, soit +4,5 % — b) environ -4,31 % — c) 40 €.

Correction de l'exercice 10 - La population d'il y a deux ans

a) Les coefficients se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = 1,05 \times 1,08 = 1,134$$

b) On divise la population actuelle par ce coefficient :

$$V_D = \frac{9\,072}{1,134} = 8\,000$$

La ville comptait 8 000 habitants il y a deux ans.

c) Année par année : $8\,000 \times 1,05 = 8\,400$ habitants, soit +400 la première année ; puis $8\,400 \times 1,08 = 9\,072$ habitants, soit +672 la seconde.

Contrôle : $400 + 672 = 1\,072$, et $8\,000 + 1\,072 = 9\,072$ ✓.

Ce que montre le c). Le second gain (+672) est bien supérieur au premier (+400), alors que les taux sont voisins (5 % et 8 %) : le taux le plus élevé s'applique en plus à une population déjà plus grande. Les deux effets se cumulent, et c'est tout le principe de la croissance composée.

Réponse. a) 1,134 — b) 8 000 habitants — c) +400 puis +672 habitants.

Correction de l'exercice 11 - Pourquoi les taux réciproques ne sont pas opposés

a) L'évolution a pour coefficient $1 + x$, donc sa réciproque a pour coefficient

$$\frac{1}{1 + x}$$

b) Par définition, le taux associé à un coefficient c vaut $c - 1$ (en valeur décimale). Ici

$$\frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

C'est bien le résultat annoncé. En pourcentage, cela s'écrit $t' = \frac{-t}{100+t} \times 100$.

c) Le taux réciproque est l'opposé du taux initial lorsque

$$\frac{-x}{1+x} = -x \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = x$$

En multipliant par $1+x$ (non nul) : $x = x(1+x)$, soit $x = x + x^2$, donc $x^2 = 0$ et $x = 0$. La seule évolution dont la réciproque est l'opposée est donc l'évolution **nulle**.

Ce que la formule donne au passage. Le dénominateur $1+x$ explique tout : pour une hausse ($x > 0$), on divise par un nombre plus grand que 1, donc $|t'| < |t|$; pour une baisse ($x < 0$), on divise par un nombre plus petit que 1, donc $|t'| > |t|$.

Réponse. a) $\frac{1}{1+x}$ — b) $\frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ — c) l'égalité $\frac{-x}{1+x} = -x$ impose $x^2 = 0$, donc $x = 0$.

Correction de l'exercice 12 - Après une forte baisse

a) Le coefficient de la baisse est 0,5, donc la réciproque a pour coefficient

$$\frac{1}{0,5} = 2$$

soit une hausse de 100 % : il faut doubler.

b) $\frac{1}{0,20} = 5$, soit une hausse de 400 % : il faut multiplier par 5.

c) L'affirmation est fausse. Après -90 %, il reste 10 % de la valeur, et une hausse de 90 % donnerait

$$0,10 \times 1,90 = 0,19$$

soit 19 % de la valeur initiale — encore 81 % de perte. Pour revenir au point de départ, il faudrait un coefficient $\frac{1}{0,1} = 10$, c'est-à-dire une hausse de 900 %.

L'asymétrie à comprendre. Les baisses sont bornées (-100 % au maximum) alors que les hausses ne le sont pas : plus la chute est forte, plus la remontée nécessaire devient énorme. C'est pourquoi une perte de 90 % ne se compense jamais par une hausse « du même ordre ».

Réponse. a) +100 % — b) +400 % — c) faux : il faudrait +900 %, car $0,1 \times 1,9 = 0,19$.

Correction de l'exercice 13 - Après la promotion

a) Le coefficient de la remise est 0,85, donc il faut appliquer

$$\frac{1}{0,85} \approx 1,176471$$

soit une hausse d'environ 17,65 %.

b) Prix réduit : $48 \times 0,85 = 40,80$ €. Puis $40,80 \times 1,176471 \approx 48,00$ € ✓ : on retrouve bien le prix d'origine.

c) Avec une hausse de seulement 15 % : $40,80 \times 1,15 = 46,92$ €. Le coefficient global vaut

$$0,85 \times 1,15 = 0,9775$$

soit une remise permanente de 2,25 % — le commerçant n'a pas retrouvé ses prix, il a durablement baissé de 1,08 € sur cet article.

La conclusion pratique. Appliquer le même taux à la hausse qu'à la baisse laisse toujours une perte résiduelle, égale à x^2 en proportion : ici $0,15^2 = 0,0225$, soit exactement les 2,25 % constatés.

Réponse. a) environ +17,65 % — b) $48 \rightarrow 40,80 \rightarrow 48$ € ✓ — c) 46,92 €, soit une remise permanente de 2,25 %.

Correction de l'exercice 14 - Attention à l'arrondi

a) On divise par le coefficient 1,07 :

$$V_D = \frac{1\,500}{1,07} \approx 1\,401,8692$$

soit 1 401,87 € au centime. **Contrôle** : $1\,401,87 \times 1,07 \approx 1\,500,00$ € ✓.

b) Le coefficient réciproque vaut $\frac{1}{1,07} \approx 0,934579$, donc

$$t' = (0,934579 - 1) \times 100 \approx -6,54$$

soit une baisse d'environ 6,54 %.

c) Avec -6,5 %, il calcule $1\,500 \times 0,935 = 1\,402,50$ €, soit 0,63 € de plus que la valeur exacte. L'erreur paraît minime, mais elle atteindrait 63 € sur un loyer cent fois plus grand, et davantage encore si l'on enchaînait plusieurs évolutions arrondies.

La règle de travail. On garde le **coefficient** non arrondi dans les calculs et on n'arrondit que le résultat final. Un taux arrondi sert à commenter, pas à calculer.

Réponse. a) 1 401,87 € — b) environ -6,54 % — c) 1 402,50 €, soit 0,63 € d'écart.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : remonter une facture

a) Le total TTC s'obtient en multipliant le hors taxes remisé par 1,20, donc on divise :

$$\frac{1\,296}{1,20} = 1\,080$$

soit 1 080 € hors taxes après remise.

b) La remise de 10 % correspond au coefficient 0,90, donc on divise encore :

$$\frac{1\,080}{0,90} = 1\,200$$

Le montant hors taxes avant remise était de 1 200 €.

Contrôle du chemin complet : $1\,200 \times 0,9 = 1\,080$ €, puis $1\,080 \times 1,2 = 1\,296$ € ✓.

c) Remise : $1\,200 - 1\,080 = 120$ €. TVA : $1\,296 - 1\,080 = 216$ €, ce qui fait bien 20 % de 1 080 €.

d) Avec 15 % de remise : $1\,200 \times 0,85 = 1\,020$ € hors taxes, puis $1\,020 \times 1,20 = 1\,224$ € TTC. L'économie supplémentaire est de $1\,296 - 1\,224 = 72$ € — soit exactement les 5 points de remise en plus, majorés de la TVA : $1\,200 \times 0,05 \times 1,2 = 72$ €.

e) On cherche le coefficient de remise c tel que $1\,200 \times c \times 1,20 = 1\,200$, c'est-à-dire

$$c = \frac{1\,200}{1\,200 \times 1,20} = \frac{1}{1,20} \approx 0,8333$$

soit une remise d'environ 16,67 % : il faudrait une remise qui compense exactement la TVA.

Ce que l'exercice apprend. Remonter une chaîne d'évolutions se fait **en sens inverse**, en divisant par chaque coefficient dans l'ordre inverse de leur application. Et le coefficient de remise exigé au e) n'est autre que le taux réciproque de la TVA, déjà

rencontré dans cette plaquette.

Réponse. a) 1 080 € — b) 1 200 € — c) remise 120 €, TVA 216 € — d) 1 224 € TTC, soit 72 € d'économie de plus — e) environ 16,67 %.