

Plaquette 3 – Évolutions successives

Pourcentages et taux d'évolution — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règle fondamentale. Pour des évolutions qui se succèdent,

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_n$$

puis $t_{\text{global}} = (CM_{\text{global}} - 1) \times 100$.

Une évolution manquante. Si l'on connaît le coefficient global et l'un des coefficients :

$$CM_2 = \frac{CM_{\text{global}}}{CM_1}$$

Évolution répétée n fois au même taux.

$$CM_{\text{global}} = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

Taux moyen sur n périodes :

$$1 + \frac{t_m}{100} = (CM_{\text{global}})^{\frac{1}{n}}$$

Deux grandeurs qui évoluent ensemble. Pour un quotient (pouvoir d'achat, prix au kilo, densité), les coefficients se **divisent** :

$$CM_{\text{quotient}} = \frac{CM_{\text{numérateur}}}{CM_{\text{dénominateur}}}$$

Puissances à reconnaître.

Puissance	Valeur	Taux global
$1,1^2$	1,21	+21 %
$1,1^3$	1,331	+33,1 %
$1,05^2$	1,1025	+10,25 %
$0,9^2$	0,81	-19 %

Ce que la règle interdit. $t_1 + t_2$ n'est pas le taux global ; $\frac{t_{\text{global}}}{n}$ n'est pas le taux moyen ; deux taux opposés donnent toujours une **baisse**, puisque $(1+x)(1-x) = 1-x^2 < 1$.

Correction de l'exercice 1 - Deux hausses de suite

a) Les coefficients se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = 1,08 \times 1,15 = 1,242$$

donc $t = (1,242 - 1) \times 100 = 24,2$: le tarif a augmenté de 24,2 %.

b) $25 \times 1,242 = 31,05$, soit 31,05 €.

Contrôle étape par étape. $25 \times 1,08 = 27$ € après un an, puis $27 \times 1,15 = 31,05$ € ✓.

c) La somme des taux donne 23 %, alors que le taux réel est 24,2 % : elle **sous-estime** l'évolution. La différence de 1,2 point vient de la seconde hausse, qui s'applique à un tarif déjà augmenté : les 15 % portent sur 27 € et non sur 25 €.

Le cas général. Pour deux hausses, la somme des taux sous-estime toujours le résultat ; pour deux baisses, elle le surestime. L'écart vaut exactement le produit des deux taux, ici $0,08 \times 0,15 = 0,012$, soit 1,2 point.

Réponse. a) 1,242, soit +24,2 % — b) 31,05 € — c) elle sous-estime : 23 % au lieu de 24,2 %.

Correction de l'exercice 2 – Une hausse puis une baisse

a) On multiplie les coefficients :

$$CM_{\text{global}} = 1,30 \times 0,75 = 0,975$$

donc $t = (0,975 - 1) \times 100 = -2,5$: la fréquentation a **baissé** de 2,5 % sur les deux ans.

b) Non : le coefficient global est inférieur à 1, donc le festival compte moins de spectateurs qu'au départ, malgré une hausse plus forte que la baisse en apparence (30 % contre 25 %). La baisse s'applique à un effectif plus grand, ce qui lui donne plus de poids.

c) $12\,000 \times 1,30 = 15\,600$ spectateurs la première année, puis $15\,600 \times 0,75 = 11\,700$ la seconde.

Contrôle : $12\,000 \times 0,975 = 11\,700$ ✓, soit 300 spectateurs de moins qu'au départ.

Le raisonnement à retenir. Comparer 30 % et 25 % ne renseigne pas sur le résultat ; seul le produit des coefficients tranche. Ici il aurait fallu une baisse inférieure à 23,1 % pour conserver l'acquis, puisque $\frac{1}{1,3} \approx 0,769$.

Réponse. a) -2,5 % — b) non, il a perdu 2,5 % de spectateurs — c) 15 600 puis 11 700 spectateurs.

Correction de l'exercice 3 – Trois évolutions enchaînées

a) On multiplie les trois coefficients :

$$CM_{\text{global}} = 0,80 \times 1,10 \times 1,05 = 0,924$$

donc $t = (0,924 - 1) \times 100 = -7,6$: la production a baissé de 7,6 %.

b) Non : $0,924 < 1$. Les deux hausses cumulées ($1,1 \times 1,05 = 1,155$, soit +15,5 %) n'ont pas suffi à effacer la baisse de 20 %, car elles s'appliquent à une production réduite.

c) Il faut un coefficient c tel que $0,924 \times c = 1$, donc

$$c = \frac{1}{0,924} \approx 1,0823$$

soit une hausse d'environ 8,2 %.

Contrôle : $0,924 \times 1,0823 \approx 1,0001$ ✓ (l'écart vient de l'arrondi).

L'ordre de grandeur à anticiper. Pour compenser une baisse de 7,6 %, il faut une hausse **supérieure** à 7,6 % : c'est toujours le cas, car la hausse s'applique à une base plus petite.

Réponse. a) 0,924, soit -7,6 % — b) non — c) environ +8,2 %, de coefficient $\frac{1}{0,924} \approx 1,0823$.

Correction de l'exercice 4 - Retrouver l'évolution manquante

a) Le coefficient global vaut 1,26 et le premier coefficient 1,05. Comme les coefficients se multiplient, on divise :

$$CM_2 = \frac{CM_{\text{global}}}{CM_1} = \frac{1,26}{1,05} = 1,2$$

b) $t_2 = (1,2 - 1) \times 100 = 20$: la seconde année, le loyer a augmenté de 20 %.

c) Loyer après un an : $600 \times 1,05 = 630$ €. Après deux ans : $630 \times 1,2 = 756$ €. Et directement : $600 \times 1,26 = 756$ € ✓.

La méthode générale. Une évolution manquante ne se trouve pas par soustraction de taux ($26 - 5 = 21$ serait faux, la réponse est 20), mais par **division de coefficients**. C'est l'opération inverse de la multiplication qui a servi à composer les deux évolutions.

Le contrôle de vraisemblance. 21 % et 20 % sont proches : sur des taux plus grands, l'écart deviendrait flagrant. Il vaut donc mieux appliquer la division systématiquement, même quand la soustraction « semble » marcher.

Réponse. a) $\frac{1,26}{1,05} = 1,2$ — b) +20 % — c) $600 \rightarrow 630 \rightarrow 756$ €.

Correction de l'exercice 5 - Deux baisses identiques

a) Non. Les coefficients se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = 0,80 \times 0,80 = 0,64$$

Une baisse de 40 % correspondrait au coefficient 0,60, qui est plus petit : l'addition des taux **surestime** la baisse réelle.

b) $t = (0,64 - 1) \times 100 = -36$: la baisse globale est de 36 %. Autrement dit, il reste 64 % du prix.

c) On calcule les puissances de 0,8 :

$$0,8^2 = 0,64 \quad 0,8^3 = 0,512 \quad 0,8^4 = 0,4096$$

Trois baisses laissent encore 51,2 % du prix ; il en faut donc **quatre** pour descendre sous la moitié (40,96 %).

Le sens de ce résultat. Des baisses répétées du même taux ne conduisent jamais à zéro : chaque étape retire un pourcentage de ce qui reste, et le prix se rapproche de 0 sans l'atteindre. C'est le comportement d'une suite géométrique de raison 0,8.

Réponse. a) non, $0,8^2 = 0,64$ et non 0,60 — b) -36 % — c) quatre baisses ($0,8^4 \approx 0,41$).

Correction de l'exercice 6 - Trois démarques de soldes

a) On multiplie les trois coefficients :

$$CM_{\text{global}} = 0,70 \times 0,80 \times 0,90 = 0,504$$

donc $t = (0,504 - 1) \times 100 = -49,6$: la remise globale est de 49,6 %.

b) $180 \times 0,504 = 90,72$, soit 90,72 €.

Contrôle étape par étape. $180 \times 0,7 = 126$ € ; $126 \times 0,8 = 100,80$ € ; $100,80 \times 0,9 = 90,72$ € ✓.

c) L'annonce est inexacte si elle prétend cumuler les trois taux ($30 + 20 + 10 = 60$) : la remise réelle est de 49,6 %, soit un peu moins de la moitié du prix. Le client paie 90,72 € et non 72 €, ce qui ferait 18,72 € d'écart.

La lecture commerciale à connaître. Trois démarques « de 30 %, puis 20 %, puis 10 % » sont presque équivalentes à une remise unique de 50 %, jamais à 60 %. Le seul calcul fiable est le produit des coefficients.

Réponse. a) 0,504, soit –49,6 % — b) 90,72 € — c) non : la remise réelle est de 49,6 %, pas 60 %.

Correction de l'exercice 7 - L'ordre a-t-il une importance ?

a) $50 \times 1,40 = 70$ €, puis $70 \times 0,85 = 59,50$ €.

b) $50 \times 0,85 = 42,50$ €, puis $42,50 \times 1,40 = 59,50$ €.

c) Le résultat est le même, car la multiplication est commutative :

$$1,40 \times 0,85 = 0,85 \times 1,40 = 1,19$$

soit dans les deux cas une hausse globale de 19 %. L'ordre de deux évolutions **en pourcentage** est donc indifférent.

Avec une réduction fixe, non. Si l'on retire 8 € au lieu de 15 % :

— hausse d'abord : $50 \times 1,4 = 70$ €, puis $70 - 8 = 62$ € ;

— réduction d'abord : $50 - 8 = 42$ €, puis $42 \times 1,4 = 58,80$ €.

Les résultats diffèrent de 3,20 €, car la hausse de 40 % s'applique aussi aux 8 € dans le second cas. Une somme fixe et un pourcentage ne commutent pas.

La règle pratique. Toujours vérifier la nature des opérations : deux coefficients commutent, un coefficient et une addition non.

Réponse. a) 59,50 € — b) 59,50 € — c) l'ordre est indifférent pour deux pourcentages ($\times 1,19$), mais pas avec une réduction fixe (62 € contre 58,80 €).

Correction de l'exercice 8 - Une baisse répétée chaque année

a) Une même évolution répétée donne une puissance :

$$CM_{\text{global}} = \left(1 - \frac{7}{100}\right)^3 = 0,93^3$$

b) $0,93^3 = 0,804357$, donc

$$t = (0,804357 - 1) \times 100 \approx -19,56$$

soit une baisse d'environ 19,56 % en trois ans — et non de 21 %.

c) $4\,200 \times 0,804357 \approx 3\,378,3$, soit environ 3 378 tonnes.

d) Sur cinq ans, le coefficient vaut $0,93^5 \approx 0,6957$, soit une baisse d'environ 30,4 %. L'objectif de –30 % est donc **atteint**, de justesse, au bout de cinq ans.

Le calcul à savoir mener. On compare toujours des coefficients : l'objectif –30 % correspond à 0,70, et le rythme réel donne $0,6957 < 0,70$. Comme il s'agit d'une baisse, un coefficient **plus petit** signifie un objectif dépassé.

Réponse. a) $0,93^3$ — b) environ –19,56 % — c) environ 3 378 tonnes — d) oui : $0,93^5 \approx 0,696$, soit –30,4 %.

Correction de l'exercice 9 - Au bout de combien d'années ?

a) Le coefficient pour n années est $1,1^n$:

n	6	7	8	9
$1,1^n$	1,7716	1,9487	2,1436	2,3579

b) Doubler signifie atteindre un coefficient de 2 :

$$1,1^7 \approx 1,9487 < 2 \quad \text{et} \quad 1,1^8 \approx 2,1436 > 2$$

Le capital double donc au bout de **huit** années (au bout de sept, il manque encore un peu).

c) Non : le coefficient ne dépend pas du capital initial. Que l'on place 1 000 € ou 50 000 €, il faut le même nombre d'années pour doubler, car la condition porte sur le coefficient et non sur la valeur. On peut le vérifier : $1\,000 \rightarrow 2\,143,60$ € et $50\,000 \rightarrow 107\,180$ €, soit dans les deux cas un peu plus du double.

Le repère des financiers. À 10 % par an, un capital double en 8 ans environ ; à 7 %, en 10 ans ; à 2 %, en 35 ans. Le nombre d'années nécessaires est à peu près $\frac{70}{t}$ — une règle approximative bien pratique pour contrôler un résultat.

Réponse. a) 1,7716 ; 1,9487 ; 2,1436 ; 2,3579 — b) au bout de 8 ans — c) non, la condition porte sur le coefficient.

Correction de l'exercice 10 - Du taux global au taux moyen

a) Une hausse de 20 % correspond au coefficient 1,20.

b) Le taux moyen vérifie, d'après le cours,

$$\left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^4 = 1,20 \quad \text{donc} \quad 1 + \frac{t_m}{100} = 1,20^{\frac{1}{4}}$$

À la calculatrice, $1,20^{0,25} \approx 1,046635$, donc $t_m \approx +4,66$ % par an.

Contrôle : $1,046635^4 \approx 1,2000$ ✓.

c) Parce que quatre hausses de 5 % donneraient

$$1,05^4 \approx 1,2155$$

soit +21,55 %, plus que les 20 % observés. Diviser le taux global par le nombre d'années **surestime** toujours le taux moyen d'une hausse : chaque année profite des précédentes.

Ce que le taux moyen signifie. C'est l'évolution annuelle **régulière équivalente** : si le service avait gagné 4,66 % d'abonnés chaque année, il aurait obtenu exactement la même progression sur quatre ans. Cela ne dit rien du détail année par année.

Réponse. a) 1,20 — b) environ +4,66 % par an — c) $1,05^4 \approx 1,2155 > 1,20$: la division du taux global surestime.

Correction de l'exercice 11 - L'erreur à corriger

a) Les coefficients se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = 1,12 \times 1,12 = 1,12^2 = 1,2544$$

donc $t = (1,2544 - 1) \times 100 = 25,44$: la hausse réelle est de 25,44 %.

b) L'élève annonce 24 % : il se trompe de 1,44 point. Ce n'est pas un hasard, car

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

L'élève a gardé $1 + 2x$ et oublié le terme x^2 , qui vaut ici $0,12^2 = 0,0144$, soit précisément 1,44 point.

c) Avec deux hausses de 2 %, l'oubli vaudrait $0,02^2 = 0,0004$, soit 0,04 point : l'erreur serait presque invisible (4,04 % au lieu de 4 %). Plus les taux sont petits, plus l'addition des taux est une bonne approximation ; plus ils sont grands, plus elle est fautive.

La conséquence pratique. Sur des taux de quelques pourcents, l'addition donne un ordre de grandeur acceptable pour un contrôle mental — mais jamais une réponse à rendre.

Réponse. a) $1,12^2 = 1,2544$, soit +25,44 % — b) 1,44 point, qui est $0,12^2$ — c) plus petite : 0,04 point seulement.

Correction de l'exercice 12 - Trois ans de salaire

a) On multiplie les trois coefficients :

$$CM_{\text{global}} = 1,02 \times 1,015 \times 1,03 \approx 1,066359$$

donc $t \approx +6,64$ %.

b) $1\,900 \times 1,066359 \approx 2\,026,08$, soit 2 026,08 €.

Contrôle étape par étape. 1 938 € ; 1 967,07 € ; 2 026,08 € ✓.

c) Le taux moyen vérifie

$$\left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^3 = 1,066359$$

donc $1 + \frac{t_m}{100} = 1,066359^{\frac{1}{3}} \approx 1,021661$, soit $t_m \approx +2,17$ % par an.

Où se situe le taux moyen ? Entre le plus petit (1,5 %) et le plus grand (3 %) des taux annuels, et proche de leur moyenne simple (2,17 % contre $\frac{2 + 1,5 + 3}{3} \approx 2,17$ %). Pour des taux faibles et voisins, les deux calculs coïncident presque : c'est un bon contrôle de vraisemblance, mais seule la racine cubique donne la valeur exacte.

Réponse. a) $\approx 1,066359$, soit +6,64 % — b) 2 026,08 € — c) environ +2,17 % par an.

Correction de l'exercice 13 - Salaire, prix et pouvoir d'achat

a) Pour un quotient, les coefficients se divisent :

$$CM_{\text{pouvoir d'achat}} = \frac{CM_{\text{salaire}}}{CM_{\text{prix}}} = \frac{1,02}{1,03} \approx 0,990291$$

b) $t = (0,990291 - 1) \times 100 \approx -0,97$: le pouvoir d'achat **baisse** d'environ 0,97 %, bien que le salaire ait augmenté.

c) Il aurait fallu que le coefficient du pouvoir d'achat vaille 1, c'est-à-dire que le salaire évolue comme les prix : une hausse de 3 %, soit un coefficient 1,03.

Vérification concrète. Avec un salaire de 2 000 € et un panier à 100 €, on achète 20 paniers. Après évolution : salaire 2 040 €, panier 103 €, soit $\frac{2\,040}{103} \approx 19,81$ paniers — environ 0,97 % de moins ✓.

L'erreur courante. Soustraire les taux ($2 - 3 = -1$) donne -1 %, proche mais faux : la valeur exacte est -0,97 %. L'approximation est acceptable pour un commentaire, jamais pour un résultat.

Réponse. a) $\frac{1,02}{1,03} \approx 0,9903$ — b) environ -0,97 % — c) une hausse de 3 %.

Correction de l'exercice 14 – Naissances et départs

a) On multiplie les deux coefficients :

$$CM_{\text{global}} = 1,03 \times 0,985 = 1,01455$$

donc $t = (1,01455 - 1) \times 100 = 1,455$: la population croît de 1,455 %.

b) $8\,000 \times 1,01455 = 8\,116,4$, soit environ 8 116 habitants.

Contrôle étape par étape. $8\,000 \times 1,03 = 8\,240$ habitants, puis $8\,240 \times 0,985 = 8\,116,4$ ✓.

c) Presque, mais pas exactement : la soustraction des taux donnerait $3 - 1,5 = 1,5$ %, alors que le résultat exact est 1,455 %. L'écart de 0,045 point vient de ce que la perte de 1,5 % s'applique à une population déjà augmentée (8 240 et non 8 000) : elle retire 123,6 habitants au lieu de 120.

Pourquoi l'écart est faible ici. Il vaut $0,03 \times 0,015 = 0,00045$, soit 0,045 point : le produit de deux petits taux est très petit. C'est ce qui rend l'approximation par soustraction tentante — et néanmoins fautive.

Réponse. a) 1,01455, soit +1,455 % — b) environ 8 116 habitants — c) non, +1,455 % et non +1,5 %.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quatre ans d'activité

a) Les coefficients se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = 1,12 \times 0,95 \times 1,08 \times 1,06 \approx 1,2180672$$

donc $t \approx +21,81$ %.

b) $250 \times 1,2180672 \approx 304,52$, soit environ 305 milliers d'euros.

c) Le taux moyen vérifie

$$\left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^4 = 1,2180672$$

donc $1 + \frac{t_m}{100} = 1,2180672^{\frac{1}{4}} \approx 1,050553$, soit $t_m \approx +5,06$ % par an.

d) $304,52 \times 1,050553 \approx 319,9$, soit environ 320 milliers d'euros.

e) Deux inexactitudes. D'une part le taux global est 21,81 % et non 21 % — l'arrondi est grossier. D'autre part le taux annuel n'est pas $\frac{21}{4} = 5,25$ % : le taux moyen se calcule par une racine quatrième, et vaut 5,06 %. La division du taux global par le nombre d'années surestime systématiquement le rythme annuel d'une hausse.

Le bon commentaire aurait été : « une progression de 21,8 % en quatre ans, soit 5,1 % par an en moyenne ». Les deux chiffres sont alors cohérents, puisque $1,0506^4 \approx 1,218$.

Ce que l'exercice résume. Coefficient global par produit, taux global par $(CM - 1) \times 100$, taux moyen par racine n -ième, prévision par multiplication — les quatre gestes du chapitre, dans l'ordre.

Réponse. a) $\approx 1,21807$, soit +21,81 % — b) environ 305 milliers d'euros — c) environ +5,06 % par an — d) environ 320 milliers d'euros — e) le taux global est mal arrondi et $\frac{21}{4}$ n'est pas le taux moyen.