

Plaquette 5 – Problèmes mixtes

Pourcentages et taux d'évolution — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Proportion. Une part rapportée à un tout :

$$p = \frac{\text{partie}}{\text{total}} \times 100$$

Les proportions d'une même population **s'additionnent** et totalisent 100 %.

Taux d'évolution.

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \quad \text{CM} = 1 + \frac{t}{100}$$

Les quatre opérations sur les coefficients.

Situation	Coefficients
évolutions successives	on multiplie
retour à la valeur d'origine	on divise
produit de deux grandeurs (aire, ventes)	on multiplie
quotient de deux grandeurs (pouvoir d'achat, part)	on divise

Évolution répétée et taux moyen.

$$\text{CM}_{\text{global}} = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \quad 1 + \frac{t_m}{100} = (\text{CM}_{\text{global}})^{\frac{1}{n}}$$

Indice base 100.

$$I = \frac{V}{V_{\text{référence}}} \times 100$$

Moyenne pondérée — pour un taux global, un taux de réussite, une concentration :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots}$$

Les trois pièges du chapitre.

- la moyenne de deux pourcentages n'est pas le pourcentage global (il faut pondérer) ;
- la somme de deux taux n'est pas le taux global (il faut multiplier les coefficients) ;
- l'opposé d'un taux n'est pas le taux réciproque (il faut inverser le coefficient).

Correction de l'exercice 1 – Répartition d'un budget

a) On applique la définition d'une proportion, lue dans le sens du calcul :

$$\text{partie} = \frac{p}{100} \times \text{total}$$

Loyer : $0,35 \times 2\,400 = 840$ €. Alimentation : $0,20 \times 2\,400 = 480$ €.

b) Les deux postes représentent $35 + 20 = 55$ % du budget, donc il reste 45 %, c'est-à-dire

$$0,45 \times 2\,400 = 1\,080$$

soit 1 080 €. Contrôle : $2\,400 - 840 - 480 = 1\,080$ € ✓.

c) Nouveau loyer : $840 \times 1,04 = 873,60$ €. Nouveaux revenus : $2\,400 \times 1,01 = 2\,424$ €. La part du loyer devient

$$\frac{873,60}{2\,424} \approx 0,3604$$

soit environ 36,04 % du budget.

Le calcul direct. La part est un **quotient**, donc son coefficient est le quotient des coefficients : $\frac{1,04}{1,01} \approx 1,0297$, et $35 \times 1,0297 \approx 36,04$ ✓. Quand le loyer augmente plus vite que les revenus, sa part grandit — c'est mécanique.

Réponse. a) 840 € et 480 € — b) 1 080 €, soit 45 % — c) environ 36,04 %.

Correction de l'exercice 2 - Deux abonnements sur plusieurs années

a) Une même hausse répétée n fois donne une puissance :

$$C_A(n) = 12 \times 1,05^n$$

b) $C_A(4) = 12 \times 1,05^4 \approx 12 \times 1,2155 \approx 14,59$ € et

$C_A(5) = 12 \times 1,05^5 \approx 12 \times 1,2763 \approx 15,32$ €.

c) A devient plus cher que B lorsque $12 \times 1,05^n > 15$, c'est-à-dire

$$1,05^n > \frac{15}{12} = 1,25$$

Comme $1,05^4 \approx 1,2155 < 1,25$ et $1,05^5 \approx 1,2763 > 1,25$, c'est au bout de **cinq** ans que A dépasse B.

La lecture du résultat. Pendant quatre ans, l'abonnement A reste avantageux ; à partir de la cinquième année, B devient moins cher. Le seuil ne dépend que du rapport des deux prix de départ (1,25) et du taux de hausse, pas des montants eux-mêmes.

Réponse. a) $C_A(n) = 12 \times 1,05^n$ — b) environ 14,59 € puis 15,32 € — c) au bout de 5 ans.

Correction de l'exercice 3 - Deux villes qui se croisent

a) Chaque population suit une évolution répétée, donc une puissance :

$$A(n) = 20\,000 \times 0,98^n \quad B(n) = 15\,000 \times 1,03^n$$

b) Bertran dépasse Alix quand $B(n) > A(n)$, soit

$$15\,000 \times 1,03^n > 20\,000 \times 0,98^n$$

On divise les deux membres par 15 000 puis par $0,98^n$, qui est strictement positif — l'inégalité garde donc son sens :

$$\frac{1,03^n}{0,98^n} > \frac{20\,000}{15\,000} = \frac{4}{3}$$

et le quotient de deux puissances de même exposant s'écrit $\left(\frac{1,03}{0,98}\right)^n$.

c) On calcule $\frac{1,03}{0,98} \approx 1,05102$ et on cherche le premier exposant qui dépasse $\frac{4}{3} \approx 1,3333$:

$$1,05102^5 \approx 1,2825 \quad 1,05102^6 \approx 1,3479$$

C'est donc au bout de **six** années. Vérification directe : $A(6) \approx 17\,717$ et $B(6) \approx 17\,915$

habitants ✓.

L'outil mis en jeu. Comparer deux grandeurs qui évoluent, c'est étudier leur **quotient** : les coefficients se divisent, et le problème se ramène à une seule puissance à comparer à un nombre fixe.

Réponse. a) $20\,000 \times 0,98^n$ et $15\,000 \times 1,03^n$ — c) au bout de 6 ans.

Correction de l'exercice 4 - Deux taux de TVA sur une même facture

a) On multiplie chaque montant hors taxes par son coefficient :

$$48 \times 1,055 = 50,64 \quad 22 \times 1,20 = 26,40$$

soit 50,64 € pour la nourriture et 26,40 € pour les boissons.

b) Total TTC : $50,64 + 26,40 = 77,04$ €, pour $48 + 22 = 70$ € hors taxes.

c) Le coefficient global vaut

$$\frac{77,04}{70} \approx 1,10057$$

soit un taux global d'environ 10,06 %. Ce n'est pas la moyenne simple de 5,5 et 20, qui vaudrait 12,75 % : il faut **pondérer par les montants**, et la nourriture pèse plus lourd que les boissons.

$$\frac{48 \times 5,5 + 22 \times 20}{70} = \frac{264 + 440}{70} \approx 10,06$$

Le principe général. Un taux global portant sur plusieurs parties est une moyenne **pondérée par les masses** des taux partiels. C'est le même mécanisme que pour un budget par postes ou une moyenne de notes à coefficients.

Réponse. a) 50,64 € et 26,40 € — b) 77,04 € — c) environ 10,06 %, et non la moyenne 12,75 %.

Correction de l'exercice 5 - Lire une série d'indices

a) L'indice se lit directement par rapport à la référence : 118,5 pour une base 100 signifie

$$CM = \frac{118,5}{100} = 1,185$$

soit une hausse de 18,5 % entre 2020 et 2026.

b) $4\,200 \times 1,185 = 4\,977$, soit 4 977 €.

c) Entre 2023 et 2026, on compare les deux indices :

$$CM = \frac{118,5}{108} \approx 1,097222$$

soit une hausse d'environ 9,72 %.

Attention à la base. La hausse entre 2023 et 2026 n'est pas $118,5 - 108 = 10,5$ % : cette différence de 10,5 points se rapporte à l'indice de 2020, pas à celui de 2023. Pour une évolution entre deux années quelconques, on **divise** les indices.

L'intérêt de l'indice. Il permet de comparer n'importe quelles deux dates sans connaître les prix : seule la référence commune compte.

Réponse. a) +18,5 % — b) 4 977 € — c) environ +9,72 %.

Correction de l'exercice 6 - Salaire et inflation sur trois ans

a) Les coefficients se multiplient :

$$CM_{\text{prix}} = 1,018 \times 1,025 \times 1,02 \approx 1,064319$$

soit une inflation d'environ 6,43 % sur trois ans.

b) Non : le salaire a gagné 5 % (coefficient 1,05) alors que les prix ont gagné 6,43 % (coefficient 1,0643). Le salaire a donc progressé **moins vite** que les prix.

c) Le pouvoir d'achat est le quotient du salaire par les prix, donc les coefficients se divisent :

$$CM_{\text{pouvoir d'achat}} = \frac{1,05}{1,064319} \approx 0,986546$$

soit une baisse d'environ 1,35 %.

La lecture économique. Le salarié gagne 5 % de plus en euros mais peut acheter 1,35 % de moins de biens : c'est la distinction entre salaire **nominal** et salaire **réel**. Une hausse de salaire inférieure à l'inflation est une perte de pouvoir d'achat, même si le montant perçu augmente.

L'approximation courante. $5 - 6,43 = -1,43$: proche de -1,35 %, mais faux. Seul le quotient des coefficients donne la valeur exacte.

Réponse. a) $\approx 1,0643$, soit +6,43 % — b) non — c) environ -1,35 %.

Correction de l'exercice 7 - Ventes en hausse, part en baisse

a) La part de marché est une proportion :

$$p = \frac{1\,200}{8\,000} \times 100 = 15$$

soit 15 % du marché.

b) Ventes : $1\,200 \times 1,20 = 1\,440$ articles. Marché : $8\,000 \times 1,25 = 10\,000$ articles. Nouvelle part :

$$\frac{1\,440}{10\,000} \times 100 = 14,4$$

soit 14,4 %.

c) Parce que la part de marché est un **quotient** : son coefficient est le quotient des coefficients,

$$\frac{1,20}{1,25} = 0,96$$

soit une baisse de 4 % de la part ($15 \times 0,96 = 14,4 \checkmark$). L'entreprise vend davantage, mais le marché a crû plus vite qu'elle : ses concurrents ont capté la croissance supplémentaire.

Les deux indicateurs à distinguer. Les ventes mesurent l'activité (+20 %, c'est une bonne année), la part de marché mesure la **position relative** (-4 %, c'est un recul face aux concurrents). Les deux lectures sont vraies simultanément.

Réponse. a) 15 % — b) 1 440 articles sur 10 000, soit 14,4 % — c) la part est un quotient : $\frac{1,20}{1,25} = 0,96$, soit -4 %.

Correction de l'exercice 8 - Le piège des taux de réussite

a) On applique chaque taux à son effectif :

$$120 \times 0,90 = 108 \quad 30 \times 0,70 = 21$$

soit 108 reçus dans le premier lycée et 21 dans le second.

b) Le taux global rapporte le nombre total de reçus au nombre total de candidats :

$$\frac{108 + 21}{150} = \frac{129}{150} = 0,86$$

soit 86 % de réussite.

c) 80 % serait la moyenne **simple** des deux taux, qui traiterait les deux lycées à égalité. Or le premier présente quatre fois plus de candidats : son taux de 90 % doit peser quatre fois plus lourd. La moyenne **pondérée** donne

$$\frac{120 \times 90 + 30 \times 70}{150} = \frac{10\,800 + 2\,100}{150} = 86$$

La règle générale. On ne moyenne jamais des pourcentages sans tenir compte de leurs effectifs. Le taux global est toujours plus proche du taux du groupe le plus nombreux — ici 86 %, bien plus proche de 90 que de 70.

Réponse. a) 108 et 21 reçus — b) 86 % — c) parce que la moyenne doit être pondérée par les effectifs.

Correction de l'exercice 9 - Pièces défectueuses

a) $2\,500 \times 0,04 = 100$ pièces défectueuses par jour.

b) Attention : la baisse de 25 % porte sur le **taux**, pas sur le nombre de pièces. Le taux devient

$$4 \times 0,75 = 3$$

soit 3 % de pièces défectueuses. (En points, il a baissé de 1 point.)

c) Nouvelle production : $2\,500 \times 1,08 = 2\,700$ pièces. Pièces défectueuses :

$$2\,700 \times 0,03 = 81$$

soit 81 pièces par jour.

d) Oui : de 100 à 81 pièces, soit

$$t = \frac{81 - 100}{100} \times 100 = -19$$

une baisse de 19 %. On la retrouve par les coefficients, puisque le nombre de défauts est le **produit** de la production et du taux :

$$1,08 \times 0,75 = 0,81$$

Ce que l'exercice distingue. Le taux de défauts baisse de 25 %, le nombre de défauts de 19 % seulement : la hausse de production reprend une partie du bénéfice du réglage. Deux grandeurs, deux taux, qu'il ne faut pas confondre dans la conclusion.

Réponse. a) 100 pièces — b) 3 % — c) 81 pièces — d) oui, -19 % (soit $1,08 \times 0,75 = 0,81$).

Correction de l'exercice 10 - Deux prélèvements successifs

a) Premier prélèvement : $2\,800 \times 0,78 = 2\,184$ €. Second prélèvement :

$$2\,184 \times 0,92 = 2\,009,28$$

soit 2 009,28 € finalement versés.

b) Les coefficients se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = 0,78 \times 0,92 = 0,7176$$

soit $t = (0,7176 - 1) \times 100 = -28,24$: le prélèvement global est de 28,24 %.

c) Non, il est **inférieur** à 30 % : le second prélèvement de 8 % ne s'applique pas au brut

mais au montant déjà réduit (2 184 € et non 2 800 €). Il retire 174,72 € au lieu des 224 € qu'auraient donnés 8 % du brut, d'où l'écart de 1,76 point.

La règle pour deux baisses. La somme des taux **surestime** toujours la baisse réelle. L'écart vaut le produit des deux taux : $0,22 \times 0,08 = 0,0176$, soit exactement 1,76 point.

Réponse. a) 2 184 € puis 2 009,28 € — b) 0,7176, soit –28,24 % — c) non : le second prélèvement porte sur un montant déjà réduit.

Correction de l'exercice 11 – Progression d'un sprinteur

a) On applique la formule du cours :

$$t = \frac{11,9 - 12,5}{12,5} \times 100 = \frac{-0,6}{12,5} \times 100 = -4,8$$

Son temps a baissé de 4,8 % : pour un chronomètre, une baisse est une progression.

b) $11,9 \times 0,95 = 11,305$, soit 11,305 s, c'est-à-dire environ 11,31 s.

c) Non. La vitesse est le quotient de la distance par le temps, donc son coefficient est l'**inverse** de celui du temps :

$$CM_{\text{vitesse}} = \frac{1}{0,95} \approx 1,0526$$

soit une hausse d'environ 5,26 % de la vitesse. Baisser le temps de 5 % fait donc gagner un peu plus de 5 % de vitesse.

Vérification. À 11,9 s, la vitesse vaut $\frac{100}{11,9} \approx 8,40$ m/s ; à 11,305 s, elle vaut

$$\frac{100}{11,305} \approx 8,85 \text{ m/s. Et } \frac{8,85}{8,40} \approx 1,053 \checkmark.$$

Le point de vigilance. Pour une grandeur inversement proportionnelle à une autre (temps et vitesse, durée et débit), les taux ne se conservent pas : on passe de l'un à l'autre par l'inverse du coefficient, exactement comme pour une évolution réciproque.

Réponse. a) –4,8 % — b) environ 11,31 s — c) non : la vitesse augmente d'environ 5,26 %.

Correction de l'exercice 12 – Un objectif sur dix ans

a) Une baisse de 40 % correspond au coefficient 0,60 :

$$5\,000 \times 0,60 = 3\,000$$

L'objectif est de 3 000 tonnes par an.

b) Le taux annuel constant cherché est le taux moyen. Il vérifie

$$\left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^{10} = 0,60 \quad \text{donc} \quad 1 + \frac{t_m}{100} = 0,60^{\frac{1}{10}} \approx 0,95020$$

soit $t_m \approx -4,98$ % par an. **Contrôle** : $0,9502^{10} \approx 0,600 \checkmark$.

c) À –3 % par an, le coefficient sur dix ans vaut

$$0,97^{10} \approx 0,7374$$

soit une baisse de seulement 26,26 % : l'objectif ne serait **pas** atteint. Les émissions seraient de $5\,000 \times 0,7374 \approx 3\,687$ tonnes, soit 687 tonnes au-dessus de la cible.

Ce que la racine apporte. Diviser 40 par 10 donnerait 4 % par an, ce qui est insuffisant : $0,96^{10} \approx 0,6648$, soit –33,5 % seulement. Pour une baisse, le taux annuel nécessaire est **plus grand** que le quotient du taux global par le nombre d'années.

Réponse. a) 3 000 tonnes — b) environ $-4,98\%$ par an — c) non : $0,97^{10} \approx 0,737$, soit $-26,26\%$.

Correction de l'exercice 13 - Un prêt à intérêts composés

a) Le coefficient pour trois années au même taux vaut

$$CM_{\text{global}} = 1,04^3 = 1,124864$$

donc la somme à rembourser est $5\,000 \times 1,124864 = 5\,624,32\text{ €}$.

b) Les intérêts s'élèvent à $5\,624,32 - 5\,000 = 624,32\text{ €}$.

c) Avec des intérêts calculés chaque année sur le capital initial (intérêts **simples**), on paierait $5\,000 \times 0,04 = 200\text{ €}$ par an, soit 600 € en trois ans. Les intérêts composés coûtent donc $24,32\text{ €}$ de plus.

D'où vient cet écart ? Année par année, les intérêts valent 200 € , puis 208 € , puis $216,32\text{ €}$: chaque année, les intérêts de l'année précédente produisent eux-mêmes des intérêts. L'écart est faible sur trois ans à 4% , mais il croît très vite avec la durée : sur vingt ans, $1,04^{20} \approx 2,191$ donne $5\,955\text{ €}$ d'intérêts, contre $4\,000\text{ €}$ en intérêts simples.

Le taux global. $(1,124864 - 1) \times 100 \approx 12,49\%$, et non $3 \times 4 = 12\%$.

Réponse. a) $5\,624,32\text{ €}$ — b) $624,32\text{ €}$ d'intérêts — c) $24,32\text{ €}$ de plus qu'avec des intérêts simples (600 €).

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux, avec justification

a) **Faux.** $1,10 \times 0,90 = 0,99$, soit une baisse de 1% . Deux taux opposés laissent toujours une perte, égale à x^2 : ici $0,10^2 = 0,01$.

b) **Vrai**, à condition que les deux articles aient le même prix p . On paie $p + 0,5p = 1,5p$ au lieu de $2p$, soit

$$\frac{1,5p}{2p} = 0,75$$

c'est-à-dire une remise de 25% sur l'ensemble.

c) **Faux.** Un taux inférieur à -100% est impossible pour une grandeur positive : le coefficient serait $1 - 1,2 = -0,2$, donc négatif. On ne peut pas perdre plus que la totalité.

d) **Faux.** Pour un produit, les coefficients se multiplient :

$$1,10 \times 1,10 = 1,21$$

soit $+21\%$ et non $+20\%$. Le point supplémentaire est le terme x^2 du développement de $(1 + x)^2$.

Le fil commun aux quatre. Trois affirmations fausses sur quatre viennent d'avoir **additionné** ce qu'il fallait multiplier — ou d'avoir oublié les bornes du possible. Le calcul du coefficient tranche chaque fois en une ligne.

Réponse. a) faux (-1%) — b) vrai ($0,75$) — c) faux, impossible — d) faux ($+21\%$).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la marge d'une entreprise

a) Première année : $480 - 360 = 120$ milliers d'euros. Seconde année :

$$480 \times 1,12 = 537,6 \quad 360 \times 1,08 = 388,8$$

donc une marge de $537,6 - 388,8 = 148,8$ milliers d'euros.

b) On applique la formule du cours :

$$t = \frac{148,8 - 120}{120} \times 100 = \frac{28,8}{120} \times 100 = 24$$

La marge a augmenté de 24 %.

c) Le chiffre d'affaires gagne 12 %, les charges 8 %, et la marge 24 % : **deux fois plus** que le chiffre d'affaires. C'est un effet de levier — la marge est une **différence**, pas un produit ni un quotient, donc son taux ne se déduit pas simplement de ceux des deux termes. Ici l'écart entre +57,6 de chiffre d'affaires et +28,8 de charges se retrouve intégralement dans la marge, qui part d'une base quatre fois plus petite.

d) Part des charges : $\frac{360}{480} = 0,75$, soit 75 % la première année, et

$$\frac{388,8}{537,6} \approx 0,723214$$

soit environ 72,32 % la seconde. On la retrouve par le quotient des coefficients :

$$75 \times \frac{1,08}{1,12} \approx 72,32 \checkmark.$$

e) La marge reste à 120 si les charges valent $537,6 - 120 = 417,6$ milliers d'euros, soit un coefficient

$$\frac{417,6}{360} = 1,16$$

c'est-à-dire une hausse de 16 % des charges.

La leçon du chapitre, en une phrase. Un taux ne se transporte pas d'une grandeur à l'autre : pour un **produit** on multiplie les coefficients, pour un **quotient** on les divise, et pour une **différence** il n'y a pas de règle — il faut recalculer les deux termes.

Réponse. a) 120 puis 148,8 milliers d'euros — b) +24 % — c) deux fois le taux du chiffre d'affaires : effet de levier sur une différence — d) 75 % puis environ 72,32 % — e) +16 %.