Plaquette 2 – Arbres pondérés

Probabilités conditionnelles — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Arbre pondéré : construction et règles.

— **Structure.** Le premier niveau porte les événements d'une partition (A et $\overline{A}$, ou A_1, A_2, A_3). Chaque nœud du premier niveau se ramifie selon le second événement.

— **Règle 1 — somme des branches.** Les branches issues d'un même nœud ont une somme égale à 1 :

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1 \qquad P_A(B) + P_A\left(\overline{B}\right) = 1$$

— **Règle 2 — nature des branches.** Le **premier** niveau porte des probabilités **simples** ; les niveaux **suivants** portent des probabilités **conditionnelles** à tout ce qui précède sur le chemin.

— **Règle 3 — probabilité d'un chemin.** C'est le **produit** des probabilités des branches parcourues :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

— **Somme de tous les chemins.** Les chemins complets d'un arbre forment une partition de l'univers : la somme de leurs probabilités vaut 1. C'est le **contrôle** à faire systématiquement.

— **Un événement qui correspond à plusieurs chemins** : on **additionne** les probabilités de ces chemins (ils sont incompatibles).

— **Arbre et tableau croisé.** Les quatre chemins d'un arbre 2×2 correspondent aux quatre cases intérieures du tableau croisé. On passe de l'un à l'autre sans calcul nouveau.

— ⚠ **Les deux erreurs à ne pas commettre** : additionner le long d'un chemin au lieu de multiplier ; écrire $P(B)$ sur une branche de second niveau, alors qu'elle porte $P_A(B)$.

Correction de l'exercice 1 – Compléter les branches manquantes

a) Les deux branches du premier niveau ont une somme égale à 1 :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$$

b) À chaque nœud du second niveau, la même règle s'applique, la condition restant fixée :

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$$

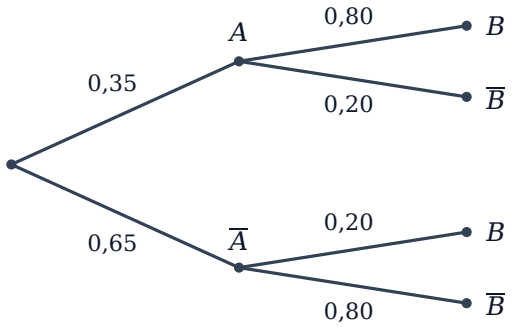
$$P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$$

c) Les trois nœuds, et leurs sommes :

— départ : $0{,}35 + 0{,}65 = 1$; depuis A : $0{,}80 + 0{,}20 = 1$; depuis $\overline{A}$: $0{,}20 + 0{,}80 = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On reporte les six probabilités sur l'arbre :



L'arbre complété : à chaque nœud, somme 1

Les trois sommes valent 1 ✓ L'arbre est correctement pondéré.

La coïncidence à ne pas mal interpréter. Ici $P_A(B) = 0{,}80$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}80$: c'est un hasard de l'énoncé, pas une règle. Les branches issues de A et celles issues de $\overline{A}$ n'ont aucun lien imposé entre elles.

Le contrôle en une phrase. Chaque nœud d'un arbre correct porte des branches dont la somme fait 1. Si ce n'est pas le cas, une donnée a été mal placée.

Réponse. a) 0,65 — b) 0,20 et 0,80 — c) les trois nœuds ont bien une somme de branches égale à 1.

Correction de l'exercice 2 – Probabilité d'un chemin

a) La probabilité d'un chemin est le **produit** des branches parcourues :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}35 \times 0{,}80 = 0{,}28$$

b) De même sur l'autre branche du premier niveau :

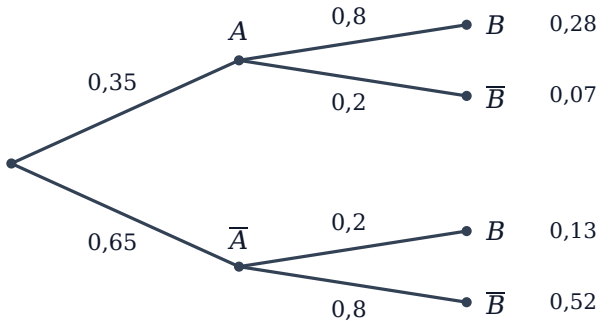
$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}65 \times 0{,}20 = 0{,}13$$

c) Les deux derniers chemins :

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}35 \times 0{,}20 = 0{,}07$$

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}65 \times 0{,}80 = 0{,}52$$

On reporte les quatre résultats au bout des chemins :



Les quatre chemins et leurs probabilités

Somme des quatre chemins :

$$0{,}28 + 0{,}13 + 0{,}07 + 0{,}52 = 1{,}00$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La somme vaut bien 1 ✓ L'arbre est complet et cohérent.

Pourquoi la somme fait toujours 1. Les quatre chemins décrivent les quatre situations possibles, deux à deux incompatibles, et il n'y en a pas d'autre : ils forment une **partition** de l'univers. Leurs probabilités s'additionnent donc pour donner la probabilité de l'événement certain.

L'erreur à traquer. Écrire $P(A \cap B) = 0{,}35 + 0{,}80 = 1{,}15$: une probabilité supérieure à 1 est immédiatement impossible. Sur un chemin, on **multiplie**.

Réponse. a) 0,28 — b) 0,13 — c) 0,07 et 0,52, de somme totale 1 ✓

Correction de l'exercice 3 – Construire un arbre à partir d'un texte

a) On note A l'événement « la pièce vient de la machine A » et D « la pièce est défectueuse ». Le texte donne :

$$P(A) = 0{,}60 \qquad P\left(\overline{A}\right) = 0{,}40$$

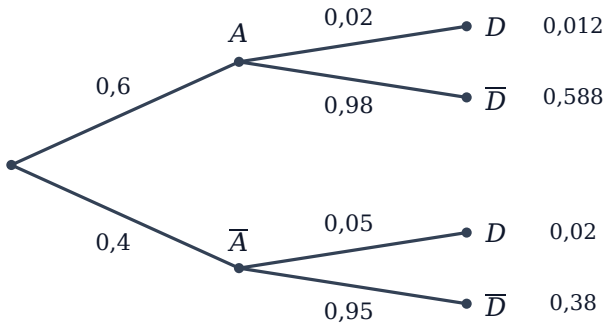
$$P_A(D) = 0{,}02 \qquad P_{\overline{A}}(D) = 0{,}05$$

Les deux dernières sont bien des **conditionnelles** : « parmi les pièces issues de A » désigne une sous-population.

b) On complète les branches manquantes, puis on multiplie le long de chaque chemin :

— $P_A\left(\overline{D}\right) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{D}\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$;
— $P(A \cap D) = 0{,}60 \times 0{,}02 = 0{,}012$;
— $P\left(A \cap \overline{D}\right) = 0{,}60 \times 0{,}98 = 0{,}588$;
— $P\left(\overline{A} \cap D\right) = 0{,}40 \times 0{,}05 = 0{,}020$;
— $P\left(\overline{A} \cap \overline{D}\right) = 0{,}40 \times 0{,}95 = 0{,}380$.

L'arbre pondéré, avec la probabilité de chaque chemin au bout :



Machine puis état de la pièce

c) Somme des quatre chemins :

$$0{,}012 + 0{,}588 + 0{,}020 + 0{,}380 = 1{,}000$$

✓ L'arbre est cohérent.

Le point remarquable. La machine B produit **moins** de pièces (40 % contre 60 %) mais **plus** de pièces défectueuses en valeur absolue (0,020 contre 0,012), parce que son taux de défaut est plus de deux fois supérieur. Un arbre permet de voir immédiatement ce genre de renversement.

Réponse. a) $P(A) = 0{,}6$, $P_A(D) = 0{,}02$, $P_{\overline{A}}(D) = 0{,}05$ — b) 0,012 ; 0,588 ; 0,020 ; 0,380 — c) la somme vaut 1 ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 4 – Branche ou chemin ?

Le critère : une **branche** porte une probabilité conditionnelle (sauf au premier niveau, où elle est simple) ; un **chemin** porte une intersection, et sa probabilité est un **produit** de branches.

a) $P_A(D) = 0{,}02$ est une probabilité de **branche**, au second niveau : elle se lit directement sur l’arbre, sans calcul. Elle signifie « parmi les pièces de A, 2 % sont défectueuses ».

b) $P(A \cap D) = 0{,}012$ est une probabilité de **chemin** : elle s’obtient en multipliant les deux branches parcourues.

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}60 \times 0{,}02 = 0{,}012$$

Elle signifie « 1,2 % de **toutes** les pièces viennent de A et sont défectueuses ».

c) $P(A) = 0{,}60$ est une probabilité de **branche**, au premier niveau : c’est une probabilité **simple**, non conditionnelle.

d) $P_{\overline{A}}\left(\overline{D}\right) = 0{,}95$ est une probabilité de **branche**, au second niveau.

La différence de sens, en une phrase. Une branche de second niveau répond à « parmi ceux-là, quelle proportion ? » ; un chemin répond à « sur l’ensemble, quelle proportion vérifie les deux conditions ? ». Le premier a un dénominateur restreint, le second le dénominateur total.

Le contrôle numérique. Une branche de second niveau est souvent **plus grande** que le chemin correspondant : ici 0,02 contre 0,012. C’est normal, puisque multiplier par $P(A) = 0{,}60$ diminue la valeur.

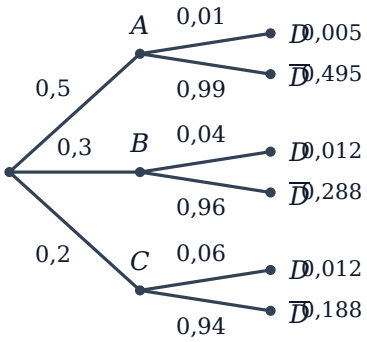
Réponse. a) branche, 0,02 — b) chemin, 0,012 — c) branche (premier niveau), 0,60 — d) branche, 0,95.

Correction de l’exercice 5 – Un arbre à trois branches au premier niveau

a) Les trois branches du premier niveau ont une somme égale à 1 :

$$P(C) = 1 - 0{,}50 - 0{,}30 = 0{,}20$$

Arbre pondéré de la situation :



Trois fournisseurs au premier niveau

b) On note D l’événement « la pièce est défectueuse ». Les trois chemins vers D :

$$P(A \cap D) = 0{,}50 \times 0{,}01 = 0{,}005$$

$$P(B \cap D) = 0{,}30 \times 0{,}04 = 0{,}012$$

$$P(C \cap D) = 0{,}20 \times 0{,}06 = 0{,}012$$

c) Les trois autres chemins mènent à $\overline{D}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$0{,}50 \times 0{,}99 = 0{,}495 \qquad 0{,}30 \times 0{,}96 = 0{,}288 \qquad 0{,}20 \times 0{,}94 = 0{,}188$$

Somme des six chemins :

$$0{,}005 + 0{,}012 + 0{,}012 + 0{,}495 + 0{,}288 + 0{,}188 = 1{,}000$$

✓ L'arbre est cohérent.

L'observation intéressante. Les fournisseurs B et C contribuent **autant** l'un que l'autre aux pièces défectueuses (0,012 chacun), alors que B fournit une fois et demie plus de pièces que C. C'est le taux de défaut plus élevé de C qui compense son plus faible volume.

La généralisation. Un arbre peut avoir autant de branches qu'on veut au premier niveau, à condition qu'elles forment une **partition** : deux à deux incompatibles, et de somme 1. Toutes les règles restent identiques.

Réponse. a) $P(C) = 0{,}20$ — b) 0,005 ; 0,012 ; 0,012 — c) la somme des six chemins vaut 1 ✓

Correction de l'exercice 6 – Tirages sans remise sur un arbre

L'urne contient 8 boules au départ. On note R_i et V_i les résultats du i-ième tirage.

a) Au premier tirage, les huit boules sont équiprobables :

$$P(R_1) = \frac{5}{8} \qquad P(V_1) = \frac{3}{8}$$

b) Après le premier tirage, il ne reste que 7 boules, et la composition dépend du résultat.

— Si la première est rouge : il reste 4 rouges et 3 vertes, donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$ et $P_{R_1}(V_2) = \frac{3}{7}$.

— Si la première est verte : il reste 5 rouges et 2 vertes, donc $P_{V_1}(R_2) = \frac{5}{7}$ et $P_{V_1}(V_2) = \frac{2}{7}$.

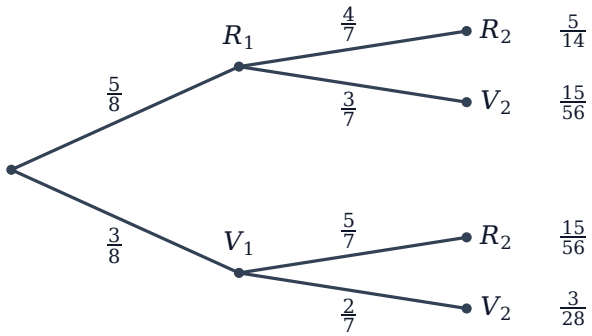
Contrôle : $\frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$ ✓ et $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1$ ✓

c) On multiplie le long de chaque chemin :

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} \qquad P(R_1 \cap V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

$$P(V_1 \cap R_2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} \qquad P(V_1 \cap V_2) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$$

L'arbre complet, chemins au bout :



Deux tirages sans remise (5 rouges, 3 vertes)

Somme :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{20+15+15+6}{56} = \frac{56}{56} = 1$$

✓ L'arbre est cohérent.

Ce que révèle le tirage sans remise. Les branches du second niveau **diffèrent** selon le nœud d'où elles partent ($\frac{4}{7}$ d'un côté, $\frac{5}{7}$ de l'autre) : c'est la signature de tirages **non indépendants**. Avec remise, les deux nœuds porteraient les mêmes branches $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{8}$.

La coïncidence utile. Les deux chemins « une rouge et une verte » ont la même probabilité $\frac{15}{56}$, quel que soit l'ordre. Ce n'est pas un hasard : les deux produits contiennent les mêmes facteurs, seul l'ordre change.

Réponse. a) $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{8}$ — b) $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}$ — c) $\frac{20}{56}$, $\frac{15}{56}$, $\frac{15}{56}$, $\frac{6}{56}$, de somme 1 ✓

Correction de l'exercice 7 – Compléter un arbre partiel

a) On dispose de $P(A)$ et de $P(A \cap B)$: la définition de la conditionnelle donne directement la branche.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}20}{0{,}25} = 0{,}80$$

b) On calcule d'abord $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$, puis

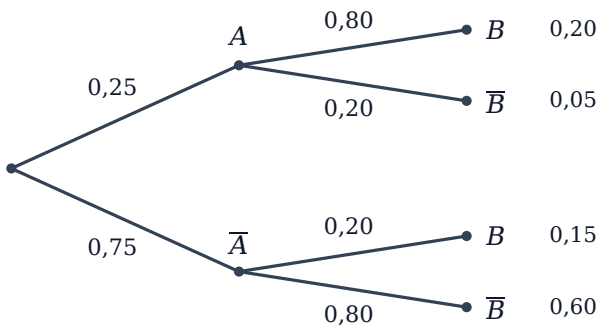
$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0{,}15}{0{,}75} = 0{,}20$$

c) Les branches complémentaires du second niveau :

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20 \qquad P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$$

Les quatre chemins :

L'arbre complété :



L'arbre complété

Détail des deux nouveaux : $0{,}25 \times 0{,}20 = 0{,}05$ et $0{,}75 \times 0{,}80 = 0{,}60$.

Contrôle : $0{,}20 + 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}60 = 1{,}00$ ✓

Le sens de la lecture. Ici l'énoncé donne des **chemins** et demande des **branches** : on divise, au lieu de multiplier. C'est la lecture de l'arbre « de bas en haut », et elle utilise la définition de la conditionnelle plutôt que la formule du produit.

Le contrôle croisé. $P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}20 + 0{,}05 = 0{,}25 = P(A)$ ✓ La somme des chemins partant d'un même nœud du premier niveau redonne la probabilité de ce nœud.

Réponse. a) $P_A(B) = 0{,}80$ — b) $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}20$ — c) 0,20 ; 0,05 ; 0,15 ; 0,60, de somme 1 ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

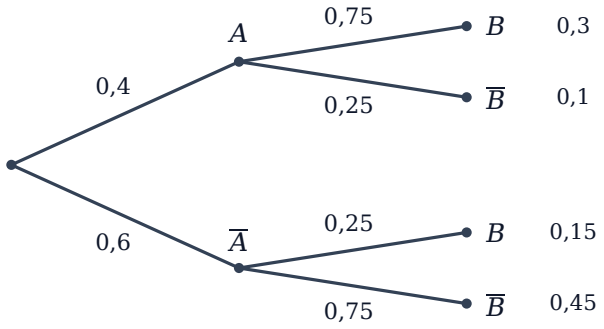
Correction de l’exercice 8 – De l’arbre au tableau croisé

a) On complète les branches, puis on multiplie :

$$P(A \cap B) = 0{,}40 \times 0{,}75 = 0{,}30 \qquad P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}40 \times 0{,}25 = 0{,}10$$

$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}60 \times 0{,}25 = 0{,}15 \qquad P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}60 \times 0{,}75 = 0{,}45$$

Sur l’arbre complété :



Les quatre chemins deviennent les quatre cases du tableau

b) Les quatre chemins deviennent les quatre cases intérieures du tableau ; les marges s’obtiennent par addition.

·	B	$\overline{B}$	**Total**
A	0,30	0,10	0,40
$\overline{A}$	0,15	0,45	0,60
Total	0,45	0,55	1

Contrôles : les lignes redonnent $P(A) = 0{,}40$ et $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}60$ ✓ et le total général vaut 1 ✓

c) La marge de la colonne B donne directement

$$P(B) = 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}45$$

Puis, par la définition de la conditionnelle :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}30}{0{,}45} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

Ce que chaque outil fait le mieux. L’arbre est fait pour **descendre** : on part des conditions et on multiplie. Le tableau est fait pour **remonter** : les marges se lisent d’un coup, et les conditionnelles inversées s’en déduisent. Les deux contiennent exactement la même information — savoir passer de l’un à l’autre fait gagner beaucoup de temps.

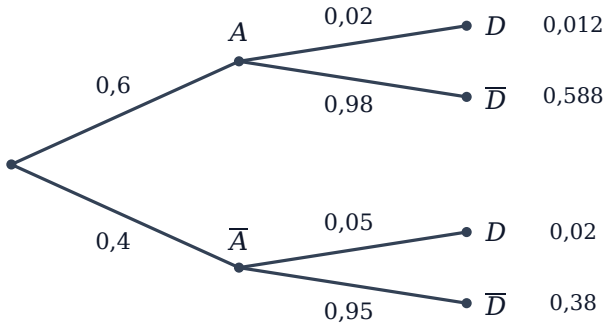
Réponse. a) 0,30 ; 0,10 ; 0,15 ; 0,45 — b) marges 0,40 / 0,60 et 0,45 / 0,55 — c) $P(B) = 0{,}45$ et $P_B(A) = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$.

Correction de l’exercice 9 – Un événement, plusieurs chemins

a) Deux chemins mènent à D : celui qui passe par A, et celui qui passe par $\overline{A}$. Une pièce défectueuse vient forcément de l’une des deux machines.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Deux chemins mènent à D

b) Les deux chemins sont **incompatibles** (une pièce ne peut pas venir des deux machines) : on **additionne** leurs probabilités.

$$P(D) = P(A \cap D) + P\left(\overline{A} \cap D\right)$$

$$P(D) = 0{,}60 \times 0{,}02 + 0{,}40 \times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$$

Soit 3,2 % de pièces défectueuses dans la production totale.

c) **Première façon**, par l'événement contraire :

$$P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}032 = 0{,}968$$

Seconde façon, en additionnant les deux chemins menant à $\overline{D}$:

$$P\left(\overline{D}\right) = 0{,}60 \times 0{,}98 + 0{,}40 \times 0{,}95 = 0{,}588 + 0{,}380 = 0{,}968$$

Les deux méthodes concordent ✓

La règle des deux opérations. Sur un arbre, on **multiplie** le long d'un chemin et on **additionne** entre chemins. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente, et elle se repère : additionner sur un chemin donne souvent un résultat supérieur à 1.

Ce que la question b) annonce. Le calcul mené ici est exactement la **formule des probabilités totales**, objet de la plaquette suivante. On vient de l'utiliser sans la nommer, simplement en lisant l'arbre.

Réponse. a) deux chemins — b) $P(D) = 0{,}032$ — c) $P\left(\overline{D}\right) = 0{,}968$, par le complémentaire ou par la somme des deux autres chemins.

Correction de l'exercice 10 – L'arbre d'un test de dépistage

a) Les trois données :

$$P(M) = 0{,}02 \qquad P_M(T) = 0{,}95 \qquad P_{\overline{M}}(T) = 0{,}03$$

La troisième est le taux de **faux positifs** : parmi les non-malades, 3 % ont pourtant un test positif.

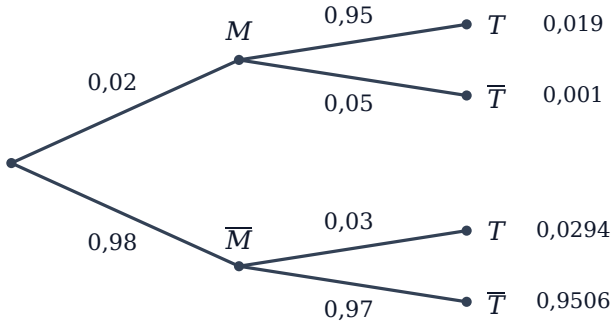
b) On complète les branches : $P\left(\overline{M}\right) = 0{,}98$, $P_M\left(\overline{T}\right) = 0{,}05$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right) = 0{,}97$. Puis les quatre chemins :

$$P(M \cap T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}019 \qquad P\left(M \cap \overline{T}\right) = 0{,}02 \times 0{,}05 = 0{,}001$$

$$P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0294 \qquad P\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right) = 0{,}98 \times 0{,}97 = 0{,}9506$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L’arbre du dépistage, avec les quatre chemins (de haut en bas : vrai positif, faux négatif, faux positif, vrai négatif) :



Vrai positif, faux négatif, faux positif, vrai négatif

c) Somme des quatre chemins :

$$0{,}019 + 0{,}001 + 0{,}0294 + 0{,}9506 = 1{,}0000$$

✓ Puis, en additionnant les deux chemins menant à un test positif :

$$P(T) = 0{,}019 + 0{,}0294 = 0{,}0484$$

Soit 4,84 % de tests positifs dans la population.

Le résultat frappant. Parmi les 0,0484 de tests positifs, seulement 0,019 correspondent à de vrais malades : les **faux positifs** (0,0294) sont plus nombreux que les vrais ! La raison est purement arithmétique : 3 % d’une population de 98 % pèse plus lourd que 95 % d’une population de 2 %.

Ce que cela prépare. La plaquette suivante calculera $P_T(M) = \dfrac{0{,}019}{0{,}0484} \approx 0{,}393$: un test positif ne signale un vrai malade que dans 39 % des cas, malgré un test « fiable à 95 % ».

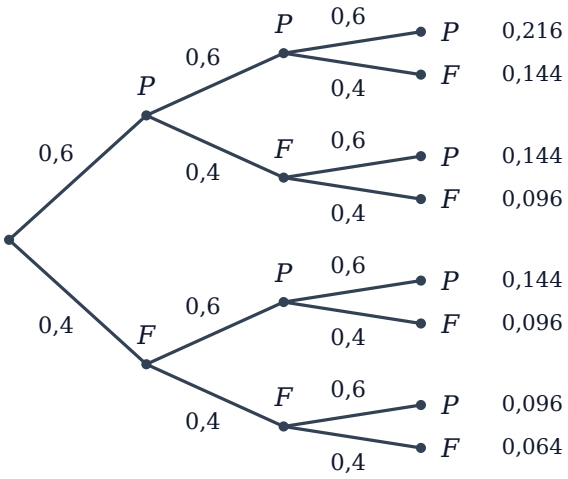
Réponse. a) $P(M) = 0{,}02$, $P_M(T) = 0{,}95$, $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}03$ — b) 0,019 ; 0,001 ; 0,0294 ; 0,9506 — c) somme 1 ✓ et $P(T) = 0{,}0484$.

Correction de l’exercice 11 – Un arbre à trois niveaux

Les lancers étant indépendants, chaque nœud de l’arbre porte les mêmes branches : 0,6 pour pile, 0,4 pour face. L’arbre a trois niveaux, donc $2^3 = 8$ chemins.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L’arbre des trois lancers :



Trois lancers indépendants d'une pièce truquée

a) On multiplie les trois branches du chemin :

$$P(\text{PPP}) = 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}6^3 = 0{,}216$$

b) De même, avec un face au milieu :

$$P(\text{PFP}) = 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}144$$

c) « Exactement deux piles » correspond à **trois** chemins : PPF, PFP et FPP. Chacun contient deux facteurs 0,6 et un facteur 0,4, donc chacun a la même probabilité :

$$0{,}6^2 \times 0{,}4 = 0{,}36 \times 0{,}4 = 0{,}144$$

Les trois chemins étant incompatibles, on additionne :

$$P(\text{exactement deux piles}) = 3 \times 0{,}144 = 0{,}432$$

Le contrôle par la somme totale. Les huit chemins se répartissent ainsi : 1 chemin à trois piles (0,216), 3 à deux piles (0,432), 3 à un pile ($3 \times 0{,}6 \times 0{,}16 = 0{,}288$) et 1 à zéro pile ($0{,}4^3 = 0{,}064$). Somme :

$$0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1{,}000$$

✓ L’arbre est complet.

Ce que l’ordre ne change pas. Les trois chemins à deux piles ont la même probabilité, parce que la multiplication est commutative : seul le **nombre** de piles compte, pas leur position. C’est l’idée qui mènera, en Terminale, à la loi binomiale.

Réponse. a) 0,216 — b) 0,144 — c) $3 \times 0{,}144 = 0{,}432$.

Correction de l’exercice 12 – Repérer l’erreur sur un arbre

a) **Incorrect.** Sur un chemin, on **multiplie** les branches, on ne les additionne pas. Le résultat annoncé, 1,1, est d’ailleurs impossible : une probabilité ne dépasse jamais 1. Le calcul juste est

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$$

b) **Correct.** L’élève a bien complété la branche manquante, $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, puis multiplié le long du chemin :

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $0{,}28 + 0{,}42 = 0{,}70 = P(A)$ ✓

c) **Incorrect.** L'élève a utilisé la branche du **mauvais nœud**. La règle du complémentaire s'applique au nœud considéré, ici celui qui part de $\overline{A}$:

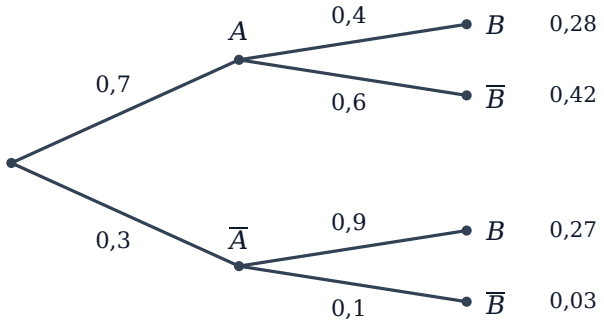
$$P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

La valeur 0,4 appartient à l'autre nœud, celui qui part de A : elle n'a rien à faire ici.

Les deux réflexes de vérification. Toute probabilité doit être comprise entre 0 et 1 (cela élimine a)). Et les branches d'un **même** nœud doivent sommer à 1, en vérifiant bien de quel nœud il s'agit (cela élimine c)).

Le contrôle final sur cet arbre. Les quatre chemins valent 0,28, 0,42, $0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}27$ et $0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03$, de somme 1,00 ✓

Réponse. a) faux : $0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$ — b) correct — c) faux : $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.



L'arbre correct, chemins au bout

Correction de l'exercice 13 – Retrouver une branche du second niveau

a) Par la définition de la conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}12}{0{,}30} = 0{,}40$$

b) L'événement B se décompose en deux parties incompatibles, selon que A est réalisé ou non :

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

D'où

$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}50 - 0{,}12 = 0{,}38$$

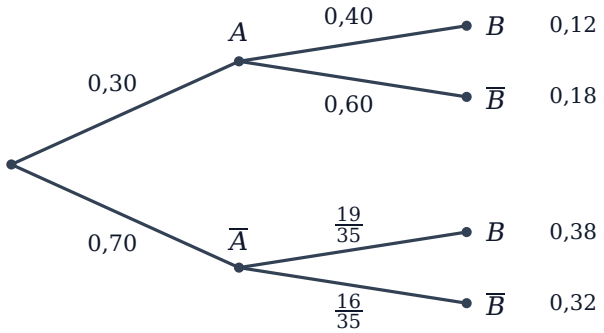
Puis, avec $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$:

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{0{,}38}{0{,}70} = \frac{19}{35} \approx 0{,}543$$

c) Les branches complémentaires : $P_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}60$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}543 = 0{,}457$. Les quatre chemins :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L’arbre reconstitué :



L'arbre reconstitué (branches exactes)

Détail : $0{,}30 \times 0{,}60 = 0{,}18$ et $0{,}70 \times 0{,}457 \approx 0{,}32$.

Contrôle : $0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}38 + 0{,}32 = 1{,}00$ ✓

La difficulté de cet exercice. L’énoncé donne $P(B)$, une **marge**, qui ne figure nulle part sur l’arbre : il faut d’abord la décomposer en deux chemins. C’est le passage obligé quand on connaît une probabilité « globale » et qu’on cherche une branche.

Le raccourci par le tableau. En reportant les données dans un tableau croisé, tout se lit par soustraction : la case $\overline{A} \cap B$ s’obtient comme $0{,}50 - 0{,}12$. Le tableau est ici plus rapide que l’arbre.

Réponse. a) $P_A(B) = 0{,}40$ — b) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}38$ et $P_{\overline{A}}(B) \approx 0{,}543$ — c) 0,12 ; 0,18 ; 0,38 ; 0,32.

Correction de l’exercice 14 – Deux niveaux avec des effectifs

a) Les majeurs sont 420 sur 600, donc

$$P(M) = \frac{420}{600} = 0{,}70 \qquad P\left(\overline{M}\right) = 0{,}30$$

$$P_M(C) = 0{,}35 \qquad P_{\overline{M}}(C) = 0{,}60$$

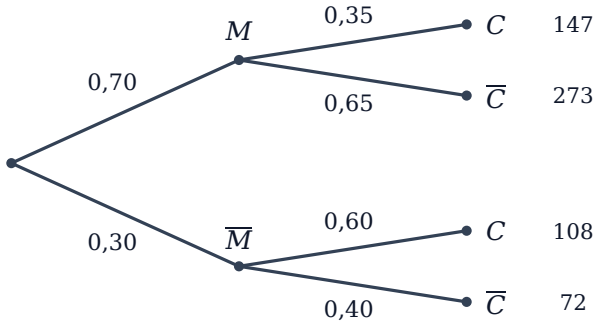
b) On peut raisonner directement sur les effectifs, ce qui évite les décimaux.

— Majeurs en compétition : $420 \times 0{,}35 = 147$;
— majeurs hors compétition : $420 - 147 = 273$;
— mineurs : $600 - 420 = 180$, dont en compétition : $180 \times 0{,}60 = 108$;
— mineurs hors compétition : $180 - 108 = 72$.

Le **tableau croisé** des effectifs, puis l’**arbre** correspondant, avec les effectifs au bout des chemins :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

·	Compétition (C)	Sans compétition	Total
Majeurs (M)	147	273	420
Mineurs	108	72	180
Total	255	345	600



Au bout des chemins : les effectifs sur 600 adhérents

Contrôle : $147 + 273 + 108 + 72 = 600$ ✓

c) Le total de la colonne compétition donne $147 + 108 = 255$ adhérents, donc

$$P(C) = \frac{255}{600} = 0{,}425$$

On peut le retrouver par les probabilités :

$$P(C) = 0{,}70 \times 0{,}35 + 0{,}30 \times 0{,}60 = 0{,}245 + 0{,}180 = 0{,}425$$

✓ Les deux méthodes concordent.

Le résultat à commenter. Les mineurs participent beaucoup plus souvent en proportion (60 % contre 35 %), mais ils sont moins nombreux en compétition (108 contre 147) parce qu'ils ne représentent que 30 % du club. Proportion et effectif ne se lisent pas de la même façon.

Le conseil de méthode. Quand l'énoncé donne un effectif total, travailler sur les **effectifs** évite les arrondis et donne un arbre entièrement en nombres entiers, plus facile à contrôler.

Réponse. a) $P(M) = 0{,}70$, $P_M(C) = 0{,}35$, $P_{\overline{M}}(C) = 0{,}60$ — b) 147 ; 273 ; 108 ; 72 — c) 255 adhérents, soit $P(C) = 0{,}425$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : deux entrepôts

a) Les données :

$$P(E_1) = 0{,}65 \qquad P(E_2) = 0{,}35$$
$$P_{E_1}(R) = 0{,}08 \qquad P_{E_2}(R) = 0{,}15$$

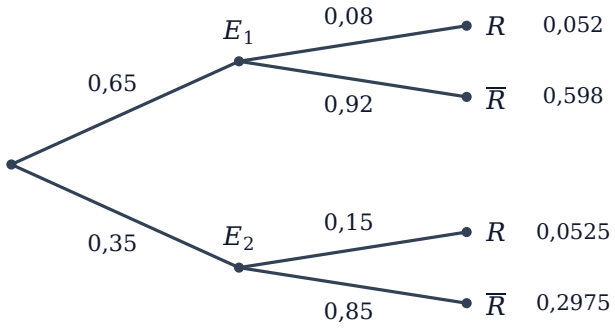
b) On complète les branches : $P_{E_1}\left(\overline{R}\right) = 0{,}92$ et $P_{E_2}\left(\overline{R}\right) = 0{,}85$. Puis les quatre chemins :

$$P(E_1 \cap R) = 0{,}65 \times 0{,}08 = 0{,}052 \qquad P\left(E_1 \cap \overline{R}\right) = 0{,}65 \times 0{,}92 = 0{,}598$$

$$P(E_2 \cap R) = 0{,}35 \times 0{,}15 = 0{,}0525 \qquad P\left(E_2 \cap \overline{R}\right) = 0{,}35 \times 0{,}85 = 0{,}2975$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L’arbre pondéré :



Entrepôt d'expédition puis retard

Somme : $0{,}052 + 0{,}598 + 0{,}0525 + 0{,}2975 = 1{,}0000$ ✓

c) Deux chemins mènent à un retard, et ils sont incompatibles :

$$P(R) = 0{,}052 + 0{,}0525 = 0{,}1045$$

Soit environ 10,5 % de colis en retard.

d) Sur 20 000 colis :

$$20\,000 \times 0{,}1045 = 2\,090 \text{ retards}$$

dont, pour l’entrepôt E_2 :

$$20\,000 \times 0{,}0525 = 1\,050 \text{ retards}$$

(et $20\,000 \times 0{,}052 = 1\,040$ pour E_1).

e) La discussion mérite deux angles, car les deux chiffres disent des choses différentes.

En **taux**, E_2 est nettement moins performant : 15 % de retard contre 8 %. Améliorer E_2 est donc la piste la plus évidente, et c’est là que la marge de progrès est la plus grande.

En **volume**, les deux entrepôts produisent presque autant de retards (1 040 contre 1 050), car E_1 traite près du double de colis. Une amélioration d’un point de pourcentage sur E_1 supprimerait $0{,}65 \times 0{,}01 \times 20\,000 = 130$ retards, contre $0{,}35 \times 0{,}01 \times 20\,000 = 70$ pour E_2 : à effort égal, agir sur E_1 rapporte davantage.

La réponse raisonnable est donc : **viser E_2 pour son taux anormalement élevé**, mais ne pas négliger E_1, qui pèse pour la moitié des retards en volume.

Le bilan de la plaquette. Un arbre se construit en trois temps : premier niveau avec les probabilités simples, second niveau avec les conditionnelles, chemins par multiplication. Puis on additionne les chemins qui réalisent l’événement cherché, et l’on contrôle que tous les chemins somment à 1.

Réponse. a) $P(E_1) = 0{,}65$, $P_{E_1}(R) = 0{,}08$, $P_{E_2}(R) = 0{,}15$ — b) 0,052 ; 0,598 ; 0,0525 ; 0,2975, somme 1 ✓ — c) $P(R) = 0{,}1045$ — d) 2 090 retards, dont 1 050 depuis E_2 — e) E_2 pour son taux, mais E_1 pèse autant en volume.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).