Plaquette 1 – Probabilité conditionnelle : définition

Probabilités conditionnelles — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité conditionnelle : définition et lectures.

— **Définition.** Pour deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On lit « probabilité de B sachant A ». C'est la proportion de B **à l'intérieur** de A.

— **Formule du produit.** En multipliant les deux membres par $P(A)$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

— ⚠ **Les deux sens ne sont pas symétriques** : en général $P_A(B) \neq P_B(A)$. Ils ont le même numérateur $P(A \cap B)$, mais des dénominateurs différents.

— **Événement contraire.** À condition **fixée**, les probabilités conditionnelles se comportent comme des probabilités ordinaires :

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B)$$

En revanche, $P_{\overline{A}}(B)$ n'a aucune raison de valoir $1 - P_A(B)$.

— **Lecture dans un tableau croisé.** Avec des effectifs, une probabilité conditionnelle est un quotient d'effectifs dans la **ligne** ou la **colonne** de la condition :

·	B	$\overline{B}$	**Total**
A	$n_{A \cap B}$	$n_{A \cap \overline{B}}$	n_A
$\overline{A}$	·	·	·
Total	n_B	·	n

$$P_A(B) = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} \qquad \text{et} \qquad P_B(A) = \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$$

— **La phrase de traduction.** « Parmi les A, quelle proportion sont des B ? » se note $P_A(B)$. « Parmi les B, quelle proportion sont des A ? » se note $P_B(A)$.

Correction de l'exercice 1 – Lire les probabilités dans un tableau

Chaque probabilité est un quotient d'effectifs, le dénominateur étant l'effectif total 200 puisque le choix est équiprobable.

a) L'effectif des filles est 120, celui des inscrits 110 :

$$P(F) = \frac{120}{200} = 0{,}6 \qquad P(S) = \frac{110}{200} = 0{,}55$$

b) L'événement $F \cap S$ correspond à la case **croisée** : les filles inscrites, soit 60 élèves.

$$P(F \cap S) = \frac{60}{200} = 0{,}3$$

c) L'événement $F \cap S$ est : « l'élève choisi est une **fille et** est **inscrite** à l'association sportive ». Les deux conditions sont réunies simultanément.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'erreur de lecture à éviter. Ne pas confondre la case 60 (filles inscrites) avec le total 120 (toutes les filles) ou 110 (tous les inscrits). L'intersection est toujours une **case intérieure** du tableau, jamais une marge.

Le contrôle. La somme des quatre cases intérieures doit valoir l'effectif total : $60 + 60 + 50 + 30 = 200$ ✓

Réponse. a) $P(F) = 0{,}6$ et $P(S) = 0{,}55$ — b) $P(F \cap S) = 0{,}3$ — c) l'élève est une fille et est inscrite à l'association sportive.

Correction de l'exercice 2 – Appliquer la formule de la conditionnelle

a) On applique la définition du cours :

$$P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$$

b) Conditionner par F, c'est se restreindre à la **ligne des filles** : il y a 120 filles, dont 60 sont inscrites.

$$P_F(S) = \frac{60}{120} = 0{,}5$$

Les deux méthodes donnent le même résultat, ce qui est logique : les 200 du dénominateur se simplifient entre le numérateur et le dénominateur de la formule.

c) Traduction : **la moitié des filles** sont inscrites à l'association sportive. Autrement dit, si l'on choisit une fille au hasard, elle a une chance sur deux d'être inscrite.

Le sens de « sachant ». L'univers a changé : on ne raisonne plus sur les 200 élèves mais sur les 120 filles. C'est pourquoi le dénominateur est 120 et non 200 — et c'est exactement ce que fait la division par $P(F)$ dans la formule.

Le réflexe pratique. Avec un tableau d'effectifs, le quotient direct est plus rapide : on identifie la ligne (ou la colonne) de la condition, et on divise la case croisée par son total.

Réponse. a) $P_F(S) = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$ — b) $\frac{60}{120} = 0{,}5$ — c) la moitié des filles sont inscrites à l'association sportive.

Correction de l'exercice 3 – Les deux sens ne sont pas les mêmes

a) On applique la formule, en conditionnant cette fois par S :

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}3}{0{,}55} = \frac{6}{11} \approx 0{,}545$$

Par les effectifs : il y a 110 inscrits, dont 60 filles, soit $\frac{60}{110} = \frac{6}{11}$ ✓

b) On a $P_F(S) = 0{,}5$ et $P_S(F) \approx 0{,}545$: les deux valeurs sont **différentes**.

La raison est claire dès que l'on écrit les deux formules : les deux quotients ont le **même numérateur** $P(F \cap S) = 0{,}3$, mais des **dénominateurs différents** — $P(F) = 0{,}6$ dans un cas, $P(S) = 0{,}55$ dans l'autre.

$$P_F(S) = \frac{0{,}3}{0{,}6} \qquad \text{et} \qquad P_S(F) = \frac{0{,}3}{0{,}55}$$

Plus le dénominateur est petit, plus le quotient est grand : comme il y a moins d'inscrits (110) que de filles (120), la seconde probabilité est la plus grande.

c) Les deux phrases :

— $P_F(S) = 0{,}5$: « parmi les **filles**, la moitié sont inscrites au sport » ;
— $P_S(F) \approx 0{,}545$: « parmi les **inscrits au sport**, environ 54,5 % sont des filles ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'erreur qui a un nom. Confondre les deux s'appelle l'**inversion des conditionnelles**. Exemple frappant : presque tous les joueurs de basket professionnels sont grands, mais presque aucune personne grande n'est joueuse de basket professionnelle.

Réponse. a) $P_S(F) = \dfrac{6}{11} \approx 0{,}545$ — b) même numérateur, dénominateurs différents (0,6 contre 0,55) — c) « la moitié des filles font du sport » contre « 54,5 % des sportifs sont des filles ».

Correction de l'exercice 4 – Traduire un énoncé en notations

La clé est de repérer la population de référence dans chaque phrase : « des salariés » désigne l'univers entier, « parmi les … » désigne une sous-population, donc une conditionnelle.

a) La référence est l'ensemble des salariés : c'est une probabilité **simple**.

$$P(C) = 0{,}30$$

b) « Parmi les cadres » : la référence est l'ensemble des cadres, donc on conditionne par C.

$$P_C(T) = 0{,}70$$

c) « des salariés » : la référence est l'univers entier, et l'élément décrit vérifie les **deux** conditions. C'est donc une **intersection**.

$$P(C \cap T) = 0{,}18$$

d) « Parmi les salariés qui télétravaillent » : la référence est T, donc on conditionne par T.

$$P_T(C) = 0{,}45$$

Le contrôle de cohérence. La formule du produit relie a), b) et c) :

$$P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0{,}30 \times 0{,}70 = 0{,}21$$

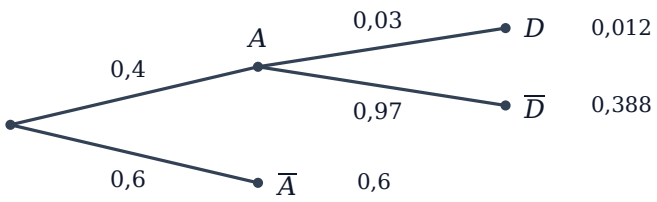
On obtient 0,21, alors que c) annonce 0,18 : les quatre données de l'énoncé sont donc **incompatibles** entre elles. C'est exactement le genre de vérification qu'il faut faire avant de se lancer dans un calcul.

Le mot qui trahit la conditionnelle. « Parmi », « sachant que », « chez les », « sur les … qui … » : tous annoncent un changement d'univers, donc une probabilité conditionnelle.

Réponse. a) $P(C) = 0{,}30$ — b) $P_C(T) = 0{,}70$ — c) $P(C \cap T) = 0{,}18$ — d) $P_T(C) = 0{,}45$.

Correction de l'exercice 5 – La formule du produit

Sur un arbre pondéré : on descend vers A, puis, à l'intérieur de A, vers D. L'énoncé ne dit rien de ce qui se passe sous $\overline{A}$.



On ne connaît que les branches issues de A

a) « 40 % des pièces » porte sur l'ensemble des pièces : $P(A) = 0{,}40$. « Parmi les pièces issues de A » conditionne par A : $P_A(D) = 0{,}03$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On cherche $P(A \cap D)$, et on dispose de $P(A)$ et $P_A(D)$: c'est exactement la formule du produit.

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}40 \times 0{,}03 = 0{,}012$$

Soit 1,2 % des pièces qui sont à la fois issues de A et défectueuses.

c) Sur un lot de 5 000 pièces, l'effectif attendu est

$$5\,000 \times 0{,}012 = 60 \text{ pièces}$$

On peut le retrouver par un raisonnement direct : 40 % de 5 000 font 2 000 pièces issues de A, dont 3 % sont défectueuses, soit $2\,000 \times 0{,}03 = 60$ ✓

Pourquoi il ne faut pas multiplier 0,40 **par** 0,03 **« au hasard ».** La formule du produit exige que le second facteur soit une probabilité **conditionnelle à** l'événement du premier. Si l'énoncé avait dit « 3 % de toutes les pièces sont défectueuses », il s'agirait de $P(D) = 0{,}03$, et $P(A \cap D)$ serait **inconnu** sans information supplémentaire.

Le repère à retenir. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$: on descend d'abord vers A, puis, **à l'intérieur de** A, vers D.

Réponse. a) $P(A) = 0{,}40$ et $P_A(D) = 0{,}03$ — b) $P(A \cap D) = 0{,}012$ — c) environ 60 pièces.

Correction de l'exercice 6 – Retrouver une probabilité manquante

a) On part de la définition et on isole $P(A)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)}$$

D'où

$$P(A) = \frac{0{,}18}{0{,}45} = 0{,}40$$

b) On applique la définition en conditionnant par B :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}30} = 0{,}60$$

c) La formule du produit s'écrit de deux façons, et les deux doivent donner le même résultat :

$$P(A) \times P_A(B) = 0{,}40 \times 0{,}45 = 0{,}18 \qquad P(B) \times P_B(A) = 0{,}30 \times 0{,}60 = 0{,}18$$

Les deux produits valent bien $P(A \cap B) = 0{,}18$ ✓ Les données sont cohérentes.

On remarque au passage que $P_A(B) = 0{,}45$ et $P_B(A) = 0{,}60$ sont **différentes**, comme attendu.

La méthode générale. La relation $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ contient trois quantités : dès qu'on en connaît deux, la troisième s'obtient par une multiplication ou une division. C'est la manipulation la plus fréquente du chapitre.

Réponse. a) $P(A) = 0{,}40$ — b) $P_B(A) = 0{,}60$ — c) les deux produits valent 0,18 ✓

Correction de l'exercice 7 – Un test de dépistage

a) « 2 % de la population » : $P(M) = 0{,}02$. « Chez les personnes malades » conditionne par M : $P_M(T) = 0{,}95$.

b) Par la formule du produit :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}019$$

Soit 1,9 % de la population.

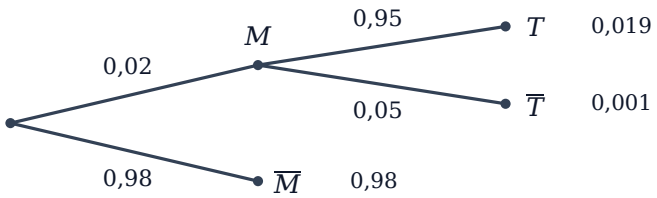
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Sur 100 000 personnes :

$$100\,000 \times 0{,}019 = 1\,900 \text{ personnes}$$

On peut le retrouver directement : 2 % de 100 000 font 2 000 malades, dont 95 % ont un test positif, soit 1 900 ✓

L'arbre de ce que l'on sait : les branches qui partent de $\overline{M}$ manquent, et ce sont elles qui portent les faux positifs.



Les branches issues de M (faux positifs) ne sont pas données

d) Non, et il ne faut surtout pas le supposer. $P_M(T)$ et $P_T(M)$ sont deux conditionnelles **inversées** :

— $P_M(T) = 0{,}95$ signifie « parmi les **malades**, 95 % ont un test positif » : c'est la **sensibilité** du test ;

— $P_T(M)$ signifierait « parmi les **tests positifs**, quelle proportion sont réellement malades ? » — une tout autre question.

Or les tests positifs comprennent aussi des personnes **non malades** dont le test s'est trompé (les faux positifs). Comme les non-malades sont beaucoup plus nombreux (98 % de la population), même un petit pourcentage d'erreur chez eux produit beaucoup de faux positifs. La probabilité $P_T(M)$ est donc **bien plus faible** que 0,95.

L'enjeu réel de cette confusion. C'est l'erreur d'interprétation la plus courante en santé publique : un test « fiable à 95 % » ne signifie pas qu'un résultat positif soit exact à 95 %. La plaquette 3 permettra de calculer $P_T(M)$ exactement.

Réponse. a) $P(M) = 0{,}02$ et $P_M(T) = 0{,}95$ — b) $P(M \cap T) = 0{,}019$ — c) 1 900 personnes — d) non : les tests positifs contiennent aussi des faux positifs, très nombreux car 98 % de la population n'est pas malade.

Correction de l'exercice 8 – Calculer directement sur les effectifs

Avec un tableau d'effectifs, une conditionnelle est un quotient d'effectifs **dans la ligne ou la colonne** de la condition.

a) Conditionner par X, c'est se restreindre à la **ligne** du système X : 240 ordinateurs, dont 90 avec garantie.

$$P_X(G) = \frac{90}{240} = 0{,}375$$

b) Conditionner par G, c'est se restreindre à la **colonne** garantie : 160 ordinateurs, dont 90 du système X.

$$P_G(X) = \frac{90}{160} = 0{,}5625$$

Les deux valeurs sont bien différentes, malgré le même numérateur 90.

c) L'événement $\overline{X}$ est « le système est Y », soit la deuxième ligne : 160 ordinateurs, dont 70 avec garantie.

$$P_{\overline{X}}(G) = \frac{70}{160} = 0{,}4375$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On a donc $P_X(G) = 0{,}375 < 0{,}4375 = P_{\overline{X}}(G)$: la garantie est un peu plus souvent souscrite sur le système Y que sur le système X.

Le piège évité. On aurait pu croire que $P_{\overline{X}}(G) = 1 - P_X(G) = 0{,}625$. C'est **faux** : la relation $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B)$ porte sur le **second** événement, pas sur la condition. Changer la condition change complètement l'univers de référence.

Le contrôle utile. $P_X(G) + P_X\left(\overline{G}\right) = \frac{90}{240} + \frac{150}{240} = 1$ ✓ La somme vaut 1 quand on garde la même condition et qu'on fait varier le second événement.

Réponse. a) $P_X(G) = 0{,}375$ — b) $P_G(X) = 0{,}5625$ — c) $P_{\overline{X}}(G) = 0{,}4375 > P_X(G)$.

Correction de l'exercice 9 – Compléter un tableau croisé

a) On place d'abord les trois données, puis on complète par différences.

— Femmes : 300, donc hommes : $500 - 300 = 200$.
— Transports : 200, donc sans transports : $500 - 200 = 300$.
— Femmes utilisant les transports : 140, donc femmes sans transports : $300 - 140 = 160$.
— Hommes utilisant les transports : $200 - 140 = 60$, et hommes sans transports : $200 - 60 = 140$.

·	**Transports (T)**	**Sans transports**	**Total**
Femmes (F)	140	160	300
Hommes	60	140	200
Total	200	300	500

Contrôle : la somme des quatre cases intérieures vaut $140 + 160 + 60 + 140 = 500$ ✓

b) Les deux conditionnelles, comme quotients d'effectifs par ligne :

$$P_F(T) = \frac{140}{300} = \frac{7}{15} \approx 0{,}467 \qquad P_{\overline{F}}(T) = \frac{60}{200} = 0{,}30$$

c) Oui : $0{,}467 > 0{,}30$. Environ 46,7 % des femmes utilisent les transports en commun, contre 30 % des hommes. L'écart est de près de 17 points de pourcentage.

Le point de méthode. Il aurait été faux de comparer les **effectifs** 140 et 60 : il y a aussi plus de femmes que d'hommes dans l'échantillon. La comparaison n'a de sens qu'entre **proportions dans chaque groupe**, c'est-à-dire entre probabilités conditionnelles.

La stratégie de remplissage. Un tableau croisé 2×2 est entièrement déterminé par trois nombres bien choisis : le total, deux marges et une case intérieure. Tout le reste s'obtient par soustraction.

Réponse. a) 140 ; 160 ; 300 puis 60 ; 140 ; 200 et les totaux 200 ; 300 ; 500 — b) $P_F(T) = \frac{7}{15} \approx 0{,}467$ et $P_{\overline{F}}(T) = 0{,}30$ — c) oui, 46,7 % contre 30 %.

Correction de l'exercice 10 – Conditionnelle et événement contraire

a) À condition **fixée**, les probabilités conditionnelles se comportent comme des probabilités ordinaires : l'événement et son contraire ont des probabilités de somme 1.

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

b) On applique la formule du produit avec $\overline{B}$:

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) \times P_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$$

c) On calcule d'abord $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$, puis la somme :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$0{,}15 + 0{,}45 = 0{,}60 = P(A)$$

L'égalité est vérifiée ✓

Pourquoi elle est toujours vraie. Les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ forment un **partage** de A : tout élément de A est soit dans B, soit hors de B, et jamais les deux. Leurs probabilités s'additionnent donc pour donner $P(A)$.

$$P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A)$$

C'est une relation à connaître : elle permet de retrouver une intersection manquante quand on connaît l'autre et la marge, exactement comme on complète un tableau croisé par soustraction.

Le piège, encore une fois. $P_{\overline{A}}(B)$ ne vaut pas $1 - P_A(B) = 0{,}75$: on ne peut rien en dire avec les seules données de l'énoncé. C'est le second événement, non la condition, qui obéit à la règle du complémentaire.

Réponse. a) $P_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}75$ — b) $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}45$ — c) $0{,}15 + 0{,}45 = 0{,}6 = P(A)$ ✓

Correction de l'exercice 11 – Un jeu de cartes

Un jeu de 32 cartes comporte quatre couleurs de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as), dont deux couleurs rouges (cœur et carreau). Les figures sont le valet, la dame et le roi, soit **trois par couleur**.

a) Les cartes rouges sont au nombre de $2 \times 8 = 16$, les figures de $4 \times 3 = 12$:

$$P(R) = \frac{16}{32} = 0{,}5 \qquad P(V) = \frac{12}{32} = 0{,}375$$

b) Les figures rouges sont les figures de cœur et de carreau, soit $2 \times 3 = 6$ cartes :

$$P(R \cap V) = \frac{6}{32} = 0{,}1875$$

c) On applique la définition :

$$P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{0{,}1875}{0{,}5} = 0{,}375 \qquad P_V(R) = \frac{0{,}1875}{0{,}375} = 0{,}5$$

Comparaison : $P_R(V) = 0{,}375 = P(V)$ et $P_V(R) = 0{,}5 = P(R)$.

Savoir que la carte est rouge ne change **rien** à la probabilité qu'elle soit une figure, et réciproquement. C'est logique : les figures sont réparties de façon identique dans les quatre couleurs.

Ce que cela annonce. Quand $P_A(B) = P(B)$, on dit que les deux événements sont **indépendants** : la condition n'apporte aucune information. Ce sera le sujet de la plaquette 4, et on peut déjà le vérifier par le produit :

$$P(R) \times P(V) = 0{,}5 \times 0{,}375 = 0{,}1875 = P(R \cap V)$$

Réponse. a) $P(R) = 0{,}5$ et $P(V) = 0{,}375$ — b) $P(R \cap V) = 0{,}1875$ — c) $P_R(V) = 0{,}375 = P(V)$ et $P_V(R) = 0{,}5 = P(R)$: la condition n'apporte rien.

Correction de l'exercice 12 – Deux lancers de dé

Les deux lancers donnent $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables, notées $(a\,;b)$ où a est le premier résultat.

a) L'événement D correspond aux six issues $(6\,;1)$, $(6\,;2)$, …, $(6\,;6)$:

$$P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) L'événement $S \cap D$: le premier lancer donne 6, et la somme atteint au moins 10. Il faut donc $6 + b \geq 10$, soit $b \geq 4$: les issues sont $(6\,;4)$, $(6\,;5)$ et $(6\,;6)$.

$$P(S \cap D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

c) On applique la définition :

$$P_D(S) = \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{12} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Interprétation : **sachant** que le premier dé a donné 6, il y a une chance sur deux que la somme atteigne 10 — il suffit que le second dé donne 4, 5 ou 6, soit trois faces sur six.

La comparaison instructive. Sans condition, S est réalisé par les issues $(4\,;6)$, $(5\,;5)$, $(5\,;6)$, $(6\,;4)$, $(6\,;5)$, $(6\,;6)$, soit 6 issues sur 36 :

$$P(S) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

La condition fait donc passer la probabilité de 0,167 à 0,5 : elle la **triple**. Ici, contrairement à l'exercice des cartes, la condition apporte une information considérable — les deux événements ne sont pas indépendants.

Le raccourci de la question c). On pouvait raisonner directement dans l'univers restreint : parmi les six issues commençant par 6, trois conviennent, donc $\frac{3}{6} = 0{,}5$ ✓

Réponse. a) $P(D) = \frac{1}{6}$ — b) $P(S \cap D) = \frac{1}{12}$ — c) $P_D(S) = 0{,}5$: sachant que le premier dé donne 6, une chance sur deux d'atteindre 10.

Correction de l'exercice 13 – Tirages sans remise

L'urne contient $5 + 3 = 8$ boules au départ.

a) Au premier tirage, les huit boules sont équiprobables et cinq sont rouges :

$$P(R_1) = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

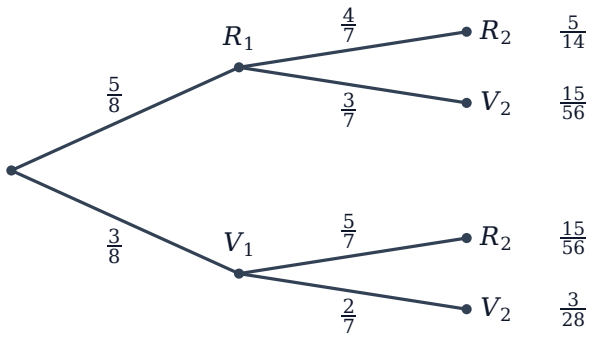
b) **Sachant** que la première boule tirée est rouge, l'urne ne contient plus que 7 boules, dont 4 rouges (une rouge est partie) et 3 vertes. La probabilité de tirer une rouge au second tirage est donc

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7} \approx 0{,}571$$

C'est ici que la conditionnelle prend tout son sens : sans le tirage précédent, le second tirage n'aurait pas la même probabilité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Deux tirages sans remise (5 rouges, 3 vertes)

c) On applique la formule du produit :

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$$

L'intérêt du sans remise. Si les tirages étaient **avec** remise, l'urne serait identique au second tirage et on aurait $P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{8}$, donc $P(R_1 \cap R_2) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} \approx 0{,}391$. Le tirage sans remise donne une probabilité **plus faible**, puisque retirer une rouge appauvrit l'urne en rouges.

La leçon. Sans remise, les tirages ne sont **pas** indépendants, et c'est exactement pourquoi les probabilités conditionnelles sont indispensables : la composition de l'urne dépend de ce qui a été tiré avant.

Réponse. a) $P(R_1) = \frac{5}{8}$ — b) $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$ (il reste 4 rouges sur 7 boules) — c) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$.

Correction de l'exercice 14 – Vrai ou faux sur les conditionnelles

a) **Faux.** Les deux quotients ont le même numérateur mais des dénominateurs différents :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ils ne sont égaux que dans le cas particulier où $P(A) = P(B)$. Contre-exemple : avec $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$, on obtient $P_A(B) = 0{,}4$ et $P_B(A) = 0{,}8$.

b) **Vrai.** La condition est la même dans les deux termes, seul le second événement change. À condition fixée, on travaille dans un univers restreint où les règles usuelles s'appliquent, donc un événement et son contraire ont des probabilités de somme 1.

c) **Faux.** Ici ce sont les **conditions** qui changent : les deux probabilités sont calculées dans deux univers **différents** (les A d'un côté, les non-A de l'autre). Rien ne les relie. Contre-exemple avec le tableau des ordinateurs de l'exercice 8 : $P_X(G) = 0{,}375$ et $P_{\overline{X}}(G) = 0{,}4375$, dont la somme vaut $0{,}8125 \neq 1$.

d) **Vrai**, à condition que $P(A) \neq 0$ pour que la conditionnelle existe. La formule donne alors

$$P_A(B) = \frac{0}{P(A)} = 0$$

Autrement dit, si A et B sont **incompatibles**, savoir que A est réalisé rend B impossible.

Le tri à mémoriser. La règle du complémentaire s'applique au **second** événement (celui dont on cherche la probabilité), jamais à la **condition**. C'est la distinction entre b) et c),

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

et c’est la question de cours la plus discriminante du chapitre.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) faux — d) vrai (si $P(A) \neq 0$).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une enquête sur les transports

a) Les salariés proches sont 320 sur 800 :

$$P(C) = \frac{320}{800} = 0{,}40 \qquad P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$$

b) Par la formule du produit, appliquée deux fois :

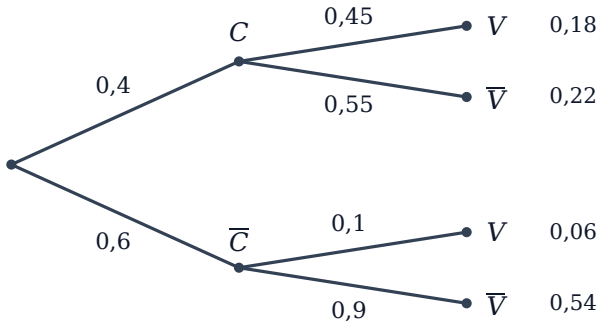
$$P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0{,}40 \times 0{,}45 = 0{,}18$$

$$P\left(\overline{C} \cap V\right) = P\left(\overline{C}\right) \times P_{\overline{C}}(V) = 0{,}60 \times 0{,}10 = 0{,}06$$

Les effectifs correspondants, sur 800 salariés :

$$800 \times 0{,}18 = 144 \qquad \text{et} \qquad 800 \times 0{,}06 = 48$$

Arbre pondéré de la situation :



Distance domicile-travail puis vélo

c) On complète par soustractions : $320 - 144 = 176$ salariés proches sans vélo, et $480 - 48 = 432$ salariés éloignés sans vélo.

·	Vélo (V)	Sans vélo	Total
Moins de 5 km (C)	144	176	320
5 km ou plus	48	432	480
Total	192	608	800

Contrôle : $144 + 176 + 48 + 432 = 800$ ✓

d) Le total des cyclistes est $144 + 48 = 192$, donc

$$P(V) = \frac{192}{800} = 0{,}24$$

Puis, par la définition :

$$P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}18}{0{,}24} = 0{,}75$$

Par les effectifs : $\frac{144}{192} = 0{,}75$ ✓

e) $P_V(C) = 0{,}75$ signifie : **parmi les salariés qui viennent à vélo,** 75 **% habitent à moins de** 5 **km**.

C’est très différent de $P_C(V) = 0{,}45$, qui dit que 45 % des salariés proches viennent à vélo. Les deux nombres répondent à deux questions distinctes, et ici le contraste est fort : le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

vélo n’est majoritaire chez personne (45 % au mieux), mais les cyclistes sont très majoritairement des salariés de proximité (75 %).

Le bilan de la plaquette. Trois outils suffisent : la définition $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, la formule du produit pour descendre de la condition vers l’intersection, et le tableau croisé pour tout organiser. Et une vigilance constante : identifier **quelle** population sert de référence.

Réponse. a) $P(C) = 0{,}40$ et $P\left(\overline{C}\right) = 0{,}60$ — b) 0,18 et 0,06, soit 144 et 48 salariés — c) 144 ; 176 ; 320 puis 48 ; 432 ; 480 — d) $P(V) = 0{,}24$ et $P_V(C) = 0{,}75$ — e) 75 % des cyclistes habitent à moins de 5 km, alors que seuls 45 % des proches viennent à vélo.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).