

Plaquette 1 – Probabilité conditionnelle : définition

Probabilités conditionnelles – Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité conditionnelle : définition et lectures.

- **Définition.** Pour deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On lit « probabilité de B sachant A ». C'est la proportion de B à l'intérieur de A .

- **Formule du produit.** En multipliant les deux membres par $P(A)$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

- **Les deux sens ne sont pas symétriques** : en général $P_A(B) \neq P_B(A)$. Ils ont le même numérateur $P(A \cap B)$, mais des dénominateurs différents.

- **Événement contraire.** À condition **fixée**, les probabilités conditionnelles se comportent comme des probabilités ordinaires :

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$$

En revanche, $P_{\overline{A}}(B)$ n'a aucune raison de valoir $1 - P_A(B)$.

- **Lecture dans un tableau croisé.** Avec des effectifs, une probabilité conditionnelle est un quotient d'effectifs dans la **ligne** ou la **colonne** de la condition :

·	B	$\overline{B}$	Total
A	$n_{A \cap B}$	$n_{A \cap \overline{B}}$	n_A
$\overline{A}$	·	·	·
Total	n_B	·	n

$$P_A(B) = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$$

- **La phrase de traduction.** « Parmi les A , quelle proportion sont des B ? » se note $P_A(B)$. « Parmi les B , quelle proportion sont des A ? » se note $P_B(A)$.

Correction de l'exercice 1 – Lire les probabilités dans un tableau

Chaque probabilité est un quotient d'effectifs, le dénominateur étant l'effectif total 200 puisque le choix est équiprobable.

- a) L'effectif des filles est 120, celui des inscrits 110 :

$$P(F) = \frac{120}{200} = 0,6 \quad P(S) = \frac{110}{200} = 0,55$$

- b) L'événement $F \cap S$ correspond à la case **croisée** : les filles inscrites, soit 60 élèves.

$$P(F \cap S) = \frac{60}{200} = 0,3$$

- c) L'événement $F \cap S$ est : « l'élève choisi est une **fille** et est **inscrite** à l'association sportive ». Les deux conditions sont réunies simultanément.

L'erreur de lecture à éviter. Ne pas confondre la case 60 (filles inscrites) avec le total 120 (toutes les filles) ou 110 (tous les inscrits). L'intersection est toujours une **case intérieure** du tableau, jamais une marge.

Le contrôle. La somme des quatre cases intérieures doit valoir l'effectif total :
 $60 + 60 + 50 + 30 = 200$ ✓

Réponse. a) $P(F) = 0,6$ et $P(S) = 0,55$ — b) $P(F \cap S) = 0,3$ — c) l'élève est une fille et est inscrite à l'association sportive.

Correction de l'exercice 2 - Appliquer la formule de la conditionnelle

a) On applique la définition du cours :

$$P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$$

b) Conditionner par F , c'est se restreindre à la **ligne des filles** : il y a 120 filles, dont 60 sont inscrites.

$$P_F(S) = \frac{60}{120} = 0,5$$

Les deux méthodes donnent le même résultat, ce qui est logique : les 200 du dénominateur se simplifient entre le numérateur et le dénominateur de la formule.

c) Traduction : **la moitié des filles** sont inscrites à l'association sportive. Autrement dit, si l'on choisit une fille au hasard, elle a une chance sur deux d'être inscrite.

Le sens de « sachant ». L'univers a changé : on ne raisonne plus sur les 200 élèves mais sur les 120 filles. C'est pourquoi le dénominateur est 120 et non 200 — et c'est exactement ce que fait la division par $P(F)$ dans la formule.

Le réflexe pratique. Avec un tableau d'effectifs, le quotient direct est plus rapide : on identifie la ligne (ou la colonne) de la condition, et on divise la case croisée par son total.

Réponse. a) $P_F(S) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$ — b) $\frac{60}{120} = 0,5$ — c) la moitié des filles sont inscrites à l'association sportive.

Correction de l'exercice 3 - Les deux sens ne sont pas les mêmes

a) On applique la formule, en conditionnant cette fois par S :

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,3}{0,55} = \frac{6}{11} \approx 0,545$$

Par les effectifs : il y a 110 inscrits, dont 60 filles, soit $\frac{60}{110} = \frac{6}{11}$ ✓

b) On a $P_F(S) = 0,5$ et $P_S(F) \approx 0,545$: les deux valeurs sont **différentes**.

La raison est claire dès que l'on écrit les deux formules : les deux quotients ont le **même numérateur** $P(F \cap S) = 0,3$, mais des **dénominateurs différents** — $P(F) = 0,6$ dans un cas, $P(S) = 0,55$ dans l'autre.

$$P_F(S) = \frac{0,3}{0,6} \quad \text{et} \quad P_S(F) = \frac{0,3}{0,55}$$

Plus le dénominateur est petit, plus le quotient est grand : comme il y a moins d'inscrits (110) que de filles (120), la seconde probabilité est la plus grande.

c) Les deux phrases :

- $P_F(S) = 0,5$: « parmi les **filles**, la moitié sont inscrites au sport » ;
- $P_S(F) \approx 0,545$: « parmi les **inscrits au sport**, environ 54,5 % sont des filles ».

L'erreur qui a un nom. Confondre les deux s'appelle l'**inversion des conditionnelles**. Exemple frappant : presque tous les joueurs de basket professionnels sont grands, mais presque aucune personne grande n'est joueuse de basket professionnelle.

Réponse. a) $P_S(F) = \frac{6}{11} \approx 0,545$ — b) même numérateur, dénominateurs différents (0,6 contre 0,55) — c) « la moitié des filles font du sport » contre « 54,5 % des sportifs sont des filles ».

Correction de l'exercice 4 - Traduire un énoncé en notations

La clé est de repérer la population de référence dans chaque phrase : « des salariés » désigne l'univers entier, « parmi les ... » désigne une sous-population, donc une conditionnelle.

a) La référence est l'ensemble des salariés : c'est une probabilité **simple**.

$$P(C) = 0,30$$

b) « Parmi les cadres » : la référence est l'ensemble des cadres, donc on conditionne par C .

$$P_C(T) = 0,70$$

c) « des salariés » : la référence est l'univers entier, et l'élément décrit vérifie les **deux** conditions. C'est donc une **intersection**.

$$P(C \cap T) = 0,18$$

d) « Parmi les salariés qui télétravaillent » : la référence est T , donc on conditionne par T .

$$P_T(C) = 0,45$$

Le contrôle de cohérence. La formule du produit relie a), b) et c) :

$$P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,30 \times 0,70 = 0,21$$

On obtient 0,21, alors que c) annonce 0,18 : les quatre données de l'énoncé sont donc **incompatibles** entre elles. C'est exactement le genre de vérification qu'il faut faire avant de se lancer dans un calcul.

Le mot qui trahit la conditionnelle. « Parmi », « sachant que », « chez les », « sur les ... qui ... » : tous annoncent un changement d'univers, donc une probabilité conditionnelle.

Réponse. a) $P(C) = 0,30$ — b) $P_C(T) = 0,70$ — c) $P(C \cap T) = 0,18$ — d) $P_T(C) = 0,45$.

Correction de l'exercice 5 - La formule du produit

a) « 40 % des pièces » porte sur l'ensemble des pièces : $P(A) = 0,40$. « Parmi les pièces issues de A » conditionne par A : $P_A(D) = 0,03$.

b) On cherche $P(A \cap D)$, et on dispose de $P(A)$ et $P_A(D)$: c'est exactement la formule du produit.

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,40 \times 0,03 = 0,012$$

Soit 1,2 % des pièces qui sont à la fois issues de A et défectueuses.

c) Sur un lot de 5 000 pièces, l'effectif attendu est

$$5\,000 \times 0,012 = 60 \text{ pièces}$$

On peut le retrouver par un raisonnement direct : 40 % de 5 000 font 2 000 pièces issues de A , dont 3 % sont défectueuses, soit $2\,000 \times 0,03 = 60$ ✓

Pourquoi il ne faut pas multiplier 0,40 par 0,03 « au hasard ». La formule du produit

exige que le second facteur soit une probabilité **conditionnelle** à l'événement du premier. Si l'énoncé avait dit « 3 % de toutes les pièces sont défectueuses », il s'agirait de $P(D) = 0,03$, et $P(A \cap D)$ serait **inconnu** sans information supplémentaire.

Le repère à retenir. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$: on descend d'abord vers A , puis, à l'intérieur de A , vers D .

Réponse. a) $P(A) = 0,40$ et $P_A(D) = 0,03$ — b) $P(A \cap D) = 0,012$ — c) environ 60 pièces.

Correction de l'exercice 6 - Retrouver une probabilité manquante

a) On part de la définition et on isole $P(A)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)}$$

D'où

$$P(A) = \frac{0,18}{0,45} = 0,40$$

b) On applique la définition en conditionnant par B :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,30} = 0,60$$

c) La formule du produit s'écrit de deux façons, et les deux doivent donner le même résultat :

$$P(A) \times P_A(B) = 0,40 \times 0,45 = 0,18 \quad P(B) \times P_B(A) = 0,30 \times 0,60 = 0,18$$

Les deux produits valent bien $P(A \cap B) = 0,18$ ✓ Les données sont cohérentes.

On remarque au passage que $P_A(B) = 0,45$ et $P_B(A) = 0,60$ sont **différentes**, comme attendu.

La méthode générale. La relation $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ contient trois quantités : dès qu'on en connaît deux, la troisième s'obtient par une multiplication ou une division. C'est la manipulation la plus fréquente du chapitre.

Réponse. a) $P(A) = 0,40$ — b) $P_B(A) = 0,60$ — c) les deux produits valent 0,18 ✓

Correction de l'exercice 7 - Un test de dépistage

a) « 2 % de la population » : $P(M) = 0,02$. « Chez les personnes malades » conditionne par M : $P_M(T) = 0,95$.

b) Par la formule du produit :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,02 \times 0,95 = 0,019$$

Soit 1,9 % de la population.

c) Sur 100 000 personnes :

$$100\,000 \times 0,019 = 1\,900 \text{ personnes}$$

On peut le retrouver directement : 2 % de 100 000 font 2 000 malades, dont 95 % ont un test positif, soit 1 900 ✓

d) Non, et il ne faut surtout pas le supposer. $P_M(T)$ et $P_T(M)$ sont deux conditionnelles **inversées** :

- $P_M(T) = 0,95$ signifie « parmi les **malades**, 95 % ont un test positif » : c'est la **sensibilité** du test ;
- $P_T(M)$ signifierait « parmi les **tests positifs**, quelle proportion sont réellement malades ? » — une tout autre question.

Or les tests positifs comprennent aussi des personnes **non malades** dont le test s'est trompé (les faux positifs). Comme les non-malades sont beaucoup plus nombreux (98 % de la population), même un petit pourcentage d'erreur chez eux produit beaucoup de faux positifs. La probabilité $P_T(M)$ est donc **bien plus faible** que 0,95.

L'enjeu réel de cette confusion. C'est l'erreur d'interprétation la plus courante en santé publique : un test « fiable à 95 % » ne signifie pas qu'un résultat positif soit exact à 95 %. La plaquette 3 permettra de calculer $P_T(M)$ exactement.

Réponse. a) $P(M) = 0,02$ et $P_M(T) = 0,95$ — b) $P(M \cap T) = 0,019$ — c) 1 900 personnes — d) non : les tests positifs contiennent aussi des faux positifs, très nombreux car 98 % de la population n'est pas malade.

Correction de l'exercice 8 - Calculer directement sur les effectifs

Avec un tableau d'effectifs, une conditionnelle est un quotient d'effectifs **dans la ligne ou la colonne** de la condition.

a) Conditionner par X , c'est se restreindre à la **ligne** du système X : 240 ordinateurs, dont 90 avec garantie.

$$P_X(G) = \frac{90}{240} = 0,375$$

b) Conditionner par G , c'est se restreindre à la **colonne** garantie : 160 ordinateurs, dont 90 du système X .

$$P_G(X) = \frac{90}{160} = 0,5625$$

Les deux valeurs sont bien différentes, malgré le même numérateur 90.

c) L'événement $\bar{X}$ est « le système est Y », soit la deuxième ligne : 160 ordinateurs, dont 70 avec garantie.

$$P_{\bar{X}}(G) = \frac{70}{160} = 0,4375$$

On a donc $P_X(G) = 0,375 < 0,4375 = P_{\bar{X}}(G)$: la garantie est un peu plus souvent souscrite sur le système Y que sur le système X .

Le piège évité. On aurait pu croire que $P_{\bar{X}}(G) = 1 - P_X(G) = 0,625$. C'est **faux** : la relation $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$ porte sur le **second** événement, pas sur la condition. Changer la condition change complètement l'univers de référence.

Le contrôle utile. $P_X(G) + P_X(\bar{G}) = \frac{90}{240} + \frac{150}{240} = 1$ ✓ La somme vaut 1 quand on garde la même condition et qu'on fait varier le second événement.

Réponse. a) $P_X(G) = 0,375$ — b) $P_G(X) = 0,5625$ — c) $P_{\bar{X}}(G) = 0,4375 > P_X(G)$.

Correction de l'exercice 9 - Compléter un tableau croisé

a) On place d'abord les trois données, puis on complète par différences.

- Femmes : 300, donc hommes : $500 - 300 = 200$.
- Transports : 200, donc sans transports : $500 - 200 = 300$.
- Femmes utilisant les transports : 140, donc femmes sans transports : $300 - 140 = 160$.
- Hommes utilisant les transports : $200 - 140 = 60$, et hommes sans transports : $200 - 60 = 140$.

·	Transports (T)	Sans transports	Total
Femmes (F)	140	160	300
Hommes	60	140	200
Total	200	300	500

Contrôle : la somme des quatre cases intérieures vaut $140 + 160 + 60 + 140 = 500$ ✓

b) Les deux conditionnelles, comme quotients d'effectifs par ligne :

$$P_F(T) = \frac{140}{300} = \frac{7}{15} \approx 0,467 \quad P_{\bar{F}}(T) = \frac{60}{200} = 0,30$$

c) Oui : $0,467 > 0,30$. Environ 46,7 % des femmes utilisent les transports en commun, contre 30 % des hommes. L'écart est de près de 17 points de pourcentage.

Le point de méthode. Il aurait été faux de comparer les **effectifs** 140 et 60 : il y a aussi plus de femmes que d'hommes dans l'échantillon. La comparaison n'a de sens qu'entre **proportions dans chaque groupe**, c'est-à-dire entre probabilités conditionnelles.

La stratégie de remplissage. Un tableau croisé 2×2 est entièrement déterminé par trois nombres bien choisis : le total, deux marges et une case intérieure. Tout le reste s'obtient par soustraction.

Réponse. a) 140 ; 160 ; 300 puis 60 ; 140 ; 200 et les totaux 200 ; 300 ; 500 — b) $P_F(T) = \frac{7}{15} \approx 0,467$ et $P_{\bar{F}}(T) = 0,30$ — c) oui, 46,7 % contre 30 %.

Correction de l'exercice 10 - Conditionnelle et événement contraire

a) À condition **fixée**, les probabilités conditionnelles se comportent comme des probabilités ordinaires : l'événement et son contraire ont des probabilités de somme 1.

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,25 = 0,75$$

b) On applique la formule du produit avec $\bar{B}$:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$$

c) On calcule d'abord $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,6 \times 0,25 = 0,15$, puis la somme :
 $0,15 + 0,45 = 0,60 = P(A)$

L'égalité est vérifiée ✓

Pourquoi elle est toujours vraie. Les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ forment un **partage** de A : tout élément de A est soit dans B , soit hors de B , et jamais les deux. Leurs probabilités s'additionnent donc pour donner $P(A)$.

$$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$$

C'est une relation à connaître : elle permet de retrouver une intersection manquante quand on connaît l'autre et la marge, exactement comme on complète un tableau croisé par soustraction.

Le piège, encore une fois. $P_{\bar{A}}(B)$ ne vaut pas $1 - P_A(B) = 0,75$: on ne peut rien en dire avec les seules données de l'énoncé. C'est le second événement, non la condition, qui obéit à la règle du complémentaire.

Réponse. a) $P_A(\bar{B}) = 0,75$ — b) $P(A \cap \bar{B}) = 0,45$ — c) $0,15 + 0,45 = 0,6 = P(A)$ ✓

Correction de l'exercice 11 - Un jeu de cartes

Un jeu de 32 cartes comporte quatre couleurs de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as), dont deux couleurs rouges (cœur et carreau). Les figures sont le valet, la dame et le roi, soit **trois par couleur**.

a) Les cartes rouges sont au nombre de $2 \times 8 = 16$, les figures de $4 \times 3 = 12$:

$$P(R) = \frac{16}{32} = 0,5 \quad P(V) = \frac{12}{32} = 0,375$$

b) Les figures rouges sont les figures de cœur et de carreau, soit $2 \times 3 = 6$ cartes :

$$P(R \cap V) = \frac{6}{32} = 0,1875$$

c) On applique la définition :

$$P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{0,1875}{0,5} = 0,375 \quad P_{V(R)} = \frac{0,1875}{0,375} = 0,5$$

Comparaison : $P_R(V) = 0,375 = P(V)$ et $P_{V(R)} = 0,5 = P(R)$.

Savoir que la carte est rouge ne change **rien** à la probabilité qu'elle soit une figure, et réciproquement. C'est logique : les figures sont réparties de façon identique dans les quatre couleurs.

Ce que cela annonce. Quand $P_A(B) = P(B)$, on dit que les deux événements sont **indépendants** : la condition n'apporte aucune information. Ce sera le sujet de la plaquette 4, et on peut déjà le vérifier par le produit :

$$P(R) \times P(V) = 0,5 \times 0,375 = 0,1875 = P(R \cap V)$$

Réponse. a) $P(R) = 0,5$ et $P(V) = 0,375$ — b) $P(R \cap V) = 0,1875$ — c) $P_R(V) = 0,375 = P(V)$ et $P_{V(R)} = 0,5 = P(R)$: la condition n'apporte rien.

Correction de l'exercice 12 - Deux lancers de dé

Les deux lancers donnent $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables, notées $(a; b)$ où a est le premier résultat.

a) L'événement D correspond aux six issues $(6; 1), (6; 2), \dots, (6; 6)$:

$$P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) L'événement $S \cap D$: le premier lancer donne 6, et la somme atteint au moins 10. Il faut donc $6 + b \geq 10$, soit $b \geq 4$: les issues sont $(6; 4), (6; 5)$ et $(6; 6)$.

$$P(S \cap D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

c) On applique la définition :

$$P_D(S) = \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{12} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Interprétation : **sachant** que le premier dé a donné 6, il y a une chance sur deux que la somme atteigne 10 — il suffit que le second dé donne 4, 5 ou 6, soit trois faces sur six.

La comparaison instructive. Sans condition, S est réalisé par les issues $(4; 6), (5; 5), (5; 6), (6; 4), (6; 5), (6; 6)$, soit 6 issues sur 36 :

$$P(S) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

La condition fait donc passer la probabilité de 0,167 à 0,5 : elle la **triple**. Ici,

contrairement à l'exercice des cartes, la condition apporte une information considérable — les deux événements ne sont pas indépendants.

Le raccourci de la question c). On pouvait raisonner directement dans l'univers restreint : parmi les six issues commençant par 6, trois conviennent, donc $\frac{3}{6} = 0,5$ ✓

Réponse. a) $P(D) = \frac{1}{6}$ — b) $P(S \cap D) = \frac{1}{12}$ — c) $P_D(S) = 0,5$: sachant que le premier dé donne 6, une chance sur deux d'atteindre 10.

Correction de l'exercice 13 - Tirages sans remise

L'urne contient $5 + 3 = 8$ boules au départ.

a) Au premier tirage, les huit boules sont équiprobables et cinq sont rouges :

$$P(R_1) = \frac{5}{8} = 0,625$$

b) **Sachant** que la première boule tirée est rouge, l'urne ne contient plus que 7 boules, dont 4 rouges (une rouge est partie) et 3 vertes. La probabilité de tirer une rouge au second tirage est donc

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

C'est ici que la conditionnelle prend tout son sens : sans le tirage précédent, le second tirage n'aurait pas la même probabilité.

c) On applique la formule du produit :

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0,357$$

L'intérêt du sans remise. Si les tirages étaient **avec** remise, l'urne serait identique au second tirage et on aurait $P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{8}$, donc $P(R_1 \cap R_2) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} \approx 0,391$. Le tirage sans remise donne une probabilité **plus faible**, puisque retirer une rouge appauvrit l'urne en rouges.

La leçon. Sans remise, les tirages ne sont **pas** indépendants, et c'est exactement pourquoi les probabilités conditionnelles sont indispensables : la composition de l'urne dépend de ce qui a été tiré avant.

Réponse. a) $P(R_1) = \frac{5}{8}$ — b) $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$ (il reste 4 rouges sur 7 boules) — c) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{14} \approx 0,357$.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux sur les conditionnelles

a) **Faux.** Les deux quotients ont le même numérateur mais des dénominateurs différents :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ils ne sont égaux que dans le cas particulier où $P(A) = P(B)$. Contre-exemple : avec $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,2$, on obtient $P_A(B) = 0,4$ et $P_B(A) = 0,8$.

b) **Vrai.** La condition est la même dans les deux termes, seul le second événement change. À condition fixée, on travaille dans un univers restreint où les règles usuelles s'appliquent, donc un événement et son contraire ont des probabilités de somme 1.

c) **Faux.** Ici ce sont les **conditions** qui changent : les deux probabilités sont calculées dans deux univers **différents** (les A d'un côté, les non- A de l'autre). Rien ne les relie. Contre-exemple avec le tableau des ordinateurs de l'exercice 8 : $P_X(G) = 0,375$ et $P_{\bar{X}}(G) = 0,4375$, dont la somme vaut $0,8125 \neq 1$.

d) **Vrai**, à condition que $P(A) \neq 0$ pour que la conditionnelle existe. La formule donne alors

$$P_A(B) = \frac{0}{P(A)} = 0$$

Autrement dit, si A et B sont **incompatibles**, savoir que A est réalisé rend B impossible.

Le tri à mémoriser. La règle du complémentaire s'applique au **second** événement (celui dont on cherche la probabilité), jamais à la **condition**. C'est la distinction entre b) et c), et c'est la question de cours la plus discriminante du chapitre.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) faux — d) vrai (si $P(A) \neq 0$).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une enquête sur les transports

a) Les salariés proches sont 320 sur 800 :

$$P(C) = \frac{320}{800} = 0,40 \quad P(\bar{C}) = 1 - 0,40 = 0,60$$

b) Par la formule du produit, appliquée deux fois :

$$P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,40 \times 0,45 = 0,18$$

$$P(\bar{C} \cap V) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(V) = 0,60 \times 0,10 = 0,06$$

Les effectifs correspondants, sur 800 salariés :

$$800 \times 0,18 = 144 \quad \text{et} \quad 800 \times 0,06 = 48$$

c) On complète par soustractions : $320 - 144 = 176$ salariés proches sans vélo, et $480 - 48 = 432$ salariés éloignés sans vélo.

.	Vélo (V)	Sans vélo	Total
Moins de 5 km (C)	144	176	320
5 km ou plus	48	432	480
Total	192	608	800

Contrôle : $144 + 176 + 48 + 432 = 800 \checkmark$

d) Le total des cyclistes est $144 + 48 = 192$, donc

$$P(V) = \frac{192}{800} = 0,24$$

Puis, par la définition :

$$P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0,18}{0,24} = 0,75$$

Par les effectifs : $\frac{144}{192} = 0,75 \checkmark$

e) $P_V(C) = 0,75$ signifie : **parmi les salariés qui viennent à vélo, 75 % habitent à moins de 5 km.**

C'est très différent de $P_C(V) = 0,45$, qui dit que 45 % des salariés proches viennent à vélo. Les deux nombres répondent à deux questions distinctes, et ici le contraste est fort : le vélo n'est majoritaire chez personne (45 % au mieux), mais les cyclistes sont très majoritairement des salariés de proximité (75 %).

Le bilan de la plaquette. Trois outils suffisent : la définition $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, la formule du produit pour descendre de la condition vers l'intersection, et le tableau croisé pour tout organiser. Et une vigilance constante : identifier **quelle** population sert de

référence.

Réponse. a) $P(C) = 0,40$ et $P(\overline{C}) = 0,60$ — b) 0,18 et 0,06, soit 144 et 48 salariés — c) 144 ; 176 ; 320 puis 48 ; 432 ; 480 — d) $P(V) = 0,24$ et $P_V(C) = 0,75$ — e) 75 % des cyclistes habitent à moins de 5 km, alors que seuls 45 % des proches viennent à vélo.