Plaquette 4 – Indépendance

Probabilités conditionnelles — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Indépendance : définition, tests et usages.

— **Définition.** Les événements A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

— **Caractérisations équivalentes** (si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$) :

$$P_A(B) = P(B) \qquad \text{et} \qquad P_B(A) = P(A)$$

Autrement dit, la condition **n'apporte aucune information**.

— **Comment tester.** On calcule séparément $P(A) \times P(B)$ et $P(A \cap B)$, puis on compare. Égalité : indépendants. Sinon : dépendants.

— **Indépendance des contraires.** Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi, ainsi que $\overline{A}$ et B, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

— ⚠ **Indépendant n'est pas incompatible.** Incompatibles signifie $P(A \cap B) = 0$; indépendants signifie $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont **dépendants** — savoir que l'un se produit rend l'autre impossible, ce qui est une information maximale.

— **Ce que l'indépendance n'autorise pas.** Elle ne donne **rien** pour la réunion : on garde toujours

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

— **Répétition d'épreuves indépendantes.** Si une épreuve de probabilité de succès p est répétée n fois de façon indépendante :

$$P(n \text{ succès}) = p^n \qquad P(\text{au moins un échec}) = 1 - p^n$$

— **Quand l'indépendance est donnée par le contexte** : lancers successifs d'un dé ou d'une pièce, tirages **avec** remise, composants distincts, individus tirés au hasard dans une grande population. Sans remise, en revanche, les tirages sont **dépendants**.

Correction de l'exercice 1 – Tester l'indépendance sur un tableau

a) Chaque probabilité est un quotient par l'effectif total 200 :

$$P(A) = \frac{80}{200} = 0{,}40 \qquad P(B) = \frac{50}{200} = 0{,}25 \qquad P(A \cap B) = \frac{20}{200} = 0{,}10$$

b) On calcule le produit des deux probabilités simples :

$$P(A) \times P(B) = 0{,}40 \times 0{,}25 = 0{,}10$$

et on le compare à l'intersection : $P(A \cap B) = 0{,}10$. Les deux valeurs sont **égales**.

c) D'après la définition du cours,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

est vérifiée : les deux événements sont donc **indépendants**. Être abonné à A ne modifie pas la probabilité d'être abonné à B.

La vérification par les conditionnelles. On peut le confirmer autrement :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P_A(B) = \frac{0{,}10}{0{,}40} = 0{,}25 = P(B)$$

Savoir qu'une personne est abonnée à A laisse la probabilité d'être abonnée à B inchangée, à 0,25 ✓

La méthode, en une phrase. On ne « voit » pas l'indépendance sur un tableau : on la **teste**, en comparant le produit des marges à la case croisée.

Réponse. a) 0,40 ; 0,25 ; 0,10 — b) le produit vaut aussi 0,10 — c) oui, les deux événements sont indépendants.

Correction de l'exercice 2 – Un cas de dépendance

a) Les marges sont inchangées, seule la case croisée change :

$$P(A \cap B) = \frac{30}{200} = 0{,}15 \qquad P(A) \times P(B) = 0{,}40 \times 0{,}25 = 0{,}10$$

b) Les deux valeurs sont **différentes** : $0{,}15 \neq 0{,}10$. Les événements ne sont donc **pas** indépendants : ils sont **dépendants**.

c) On calcule la conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}15}{0{,}40} = 0{,}375$$

À comparer à $P(B) = 0{,}25$. Savoir qu'une personne est abonnée à A fait **monter** la probabilité qu'elle soit abonnée à B, de 25 % à 37,5 %.

Interprétation : les deux abonnements sont **liés positivement**. On peut imaginer qu'un même profil de consommateur s'abonne aux deux services, ou qu'une offre couplée existe.

Le sens du signe de l'écart. Si $P(A \cap B) > P(A)P(B)$, les deux événements sont liés **positivement** (l'un favorise l'autre) ; si $P(A \cap B) < P(A)P(B)$, ils sont liés **négativement** (l'un décourage l'autre). Ici l'intersection dépasse le produit : lien positif.

La comparaison avec l'exercice précédent. Dix personnes de plus dans la case croisée suffisent à faire passer d'une indépendance parfaite à une dépendance nette. L'indépendance est une égalité exacte, donc fragile.

Réponse. a) 0,15 contre 0,10 — b) non, ils sont dépendants — c) $P_A(B) = 0{,}375 > 0{,}25 = P(B)$: les deux abonnements se favorisent.

Correction de l'exercice 3 – Couleur et figure dans un jeu de cartes

a) Le jeu comporte 16 cartes rouges (cœur et carreau), 12 figures (3 par couleur) et 6 figures rouges :

$$P(R) = \frac{16}{32} = 0{,}5 \qquad P(V) = \frac{12}{32} = 0{,}375 \qquad P(R \cap V) = \frac{6}{32} = 0{,}1875$$

b) On teste la définition :

$$P(R) \times P(V) = 0{,}5 \times 0{,}375 = 0{,}1875 = P(R \cap V)$$

L'égalité est vérifiée : les deux événements sont **indépendants**.

c) La raison est structurelle : les figures sont réparties **également** dans les quatre couleurs, à raison de trois par couleur. La proportion de figures est donc la même dans les cartes rouges ($\frac{6}{16} = 0{,}375$) que dans le jeu entier ($\frac{12}{32} = 0{,}375$) : connaître la couleur n'apporte aucune information sur le fait d'être une figure.

$$P_R(V) = \frac{6}{16} = 0{,}375 = P(V)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le contre-exemple instructif. Si l'on retirait les deux rois rouges du jeu, il resterait 30 cartes, dont 14 rouges et 10 figures, avec 4 figures rouges. Alors $P(R)P(V) = \frac{14}{30} \times \frac{10}{30} \approx 0{,}156$ contre $P(R \cap V) = \frac{4}{30} \approx 0{,}133$: l'indépendance serait détruite. Elle repose entièrement sur la **symétrie** du jeu complet.

Réponse. a) 0,5 ; 0,375 ; 0,1875 — b) le produit vaut 0,1875 = $P(R \cap V)$ — c) les figures sont réparties également dans les quatre couleurs.

Correction de l'exercice 4 – Utiliser l'indépendance pour calculer

a) L'indépendance **autorise** la multiplication pour l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}30 \times 0{,}60 = 0{,}18$$

b) Pour la réunion, l'indépendance n'apporte **aucune** formule nouvelle : on garde la relation générale du cours.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0{,}30 + 0{,}60 - 0{,}18 = 0{,}72$$

c) Les caractérisations de l'indépendance donnent la réponse sans calcul :

$$P_A(B) = P(B) = 0{,}60 \qquad P_B(A) = P(A) = 0{,}30$$

On peut le vérifier par la définition : $P_A(B) = \frac{0{,}18}{0{,}30} = 0{,}60$ ✓

L'erreur à ne surtout pas faire. Écrire $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}90$: ce serait valable si les deux événements étaient **incompatibles**, ce qui est ici exclu puisque $P(A \cap B) = 0{,}18 \neq 0$. Indépendance et incompatibilité sont deux propriétés distinctes, et souvent incompatibles entre elles.

Le récapitulatif. L'indépendance sert pour $\cap$ (on multiplie), l'incompatibilité sert pour $\cup$ (on additionne sans retrancher). Il faut savoir laquelle des deux l'énoncé fournit.

Réponse. a) $P(A \cap B) = 0{,}18$ — b) $P(A \cup B) = 0{,}72$ — c) $P_A(B) = 0{,}60$ et $P_B(A) = 0{,}30$.

Correction de l'exercice 5 – Indépendance des événements contraires

a) Par l'indépendance : $P(A \cap B) = 0{,}40 \times 0{,}25 = 0{,}10$.

Puis, en utilisant le partage de A selon B :

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}40 - 0{,}10 = 0{,}30$$

b) On teste la définition pour le couple $\left(A\,;\overline{B}\right)$, avec $P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$:

$$P(A) \times P\left(\overline{B}\right) = 0{,}40 \times 0{,}75 = 0{,}30 = P\left(A \cap \overline{B}\right)$$

L'égalité est vérifiée : A et $\overline{B}$ sont bien indépendants.

c) On calcule d'abord la probabilité du chemin, par exemple avec la formule des probabilités totales appliquée à $\overline{B}$:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) - P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}75 - 0{,}30 = 0{,}45$$

Test d'indépendance, avec $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}60$:

$$P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{B}\right) = 0{,}60 \times 0{,}75 = 0{,}45$$

L'égalité tient également ✓

La propriété générale, à connaître. Si A et B sont indépendants, alors les trois autres couples formés avec les contraires le sont aussi. En pratique, cela signifie qu'une **seule**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

vérification suffit : si l'indépendance est établie, elle vaut pour les quatre cases du tableau croisé.

L'interprétation. Si savoir que B est réalisé n'apprend rien sur A, alors savoir que B **n'est pas** réalisé n'en apprend pas davantage. C'est intuitif, et cela se démontre exactement comme ci-dessus.

Réponse. a) 0,10 et 0,30 — b) $0{,}40 \times 0{,}75 = 0{,}30$ ✓ — c) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}45 = 0{,}60 \times 0{,}75$ ✓

Correction de l'exercice 6 – Indépendant ou incompatible ?

a) Oui. Le résultat 3 est impair, donc il ne peut pas être à la fois pair et égal à 3 : l'intersection est vide.

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{donc} \quad P(A \cap B) = 0$$

Les deux événements sont **incompatibles**.

b) Non. On calcule $P(A) = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$ et $P(B) = \dfrac{1}{6}$, puis on teste :

$$P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$$

alors que $P(A \cap B) = 0$. Les deux valeurs sont différentes : les événements ne sont **pas** indépendants.

On le voit aussi par la conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{0}{0{,}5} = 0 \neq \frac{1}{6} = P(B)$$

Savoir que le résultat est pair rend l'événement « obtenir 3 » **impossible** : c'est une information décisive, donc il y a dépendance.

c) Les deux notions sont **différentes**, et même presque opposées :

$$\text{incompatibles} : P(A \cap B) = 0 \qquad \text{indépendants} : P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Deux événements incompatibles de probabilités **non nulles** sont toujours dépendants, puisque $P(A)P(B) > 0 = P(A \cap B)$. Les seuls événements à la fois incompatibles et indépendants sont ceux dont l'un a une probabilité nulle.

Le piège de vocabulaire. Dans le langage courant, « indépendant » et « sans rapport » sont synonymes, ce qui pousse à croire que des événements qui « s'excluent » sont indépendants. C'est exactement l'inverse : s'exclure, c'est être fortement lié.

Réponse. a) oui, $A \cap B = \varnothing$ — b) non : $0 \neq \frac{1}{12}$ — c) les deux notions sont distinctes ; incompatibles avec des probabilités non nulles implique dépendants.

Correction de l'exercice 7 – Deux lancers de dé

Les deux lancers donnent 36 issues équiprobables.

a) L'événement A correspond aux six issues commençant par 6, et B aux issues dont le second résultat est 2, 4 ou 6, soit $6 \times 3 = 18$ issues :

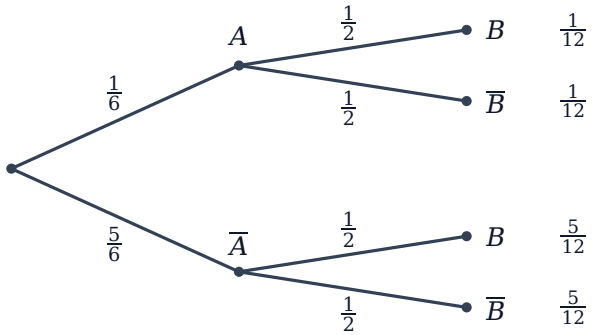
$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

b) L'événement $A \cap B$ demande un 6 au premier lancer **et** un nombre pair au second : les issues sont $(6\,;2)$, $(6\,;4)$ et $(6\,;6)$, soit trois issues.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Sur un arbre (A : premier lancer 6, B : second lancer pair), les branches du second niveau sont identiques sous A et sous $\overline{A}$:



Mêmes branches au second niveau : indépendance

c) On teste la définition :

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$$

L'égalité est vérifiée : les deux événements sont **indépendants**.

Pourquoi c'était prévisible. Les deux lancers sont physiquement indépendants : le dé n'a pas de mémoire, le résultat du premier jet n'influence en rien le second. Tout événement portant uniquement sur le premier lancer est donc indépendant de tout événement portant uniquement sur le second.

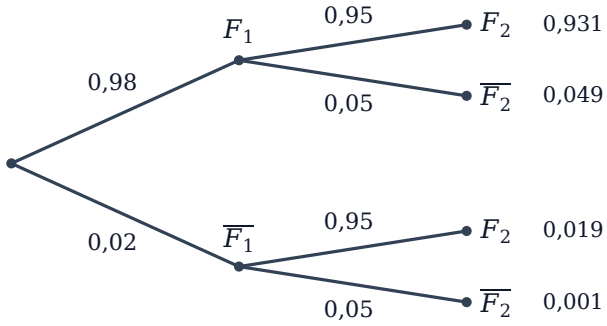
La nuance à garder. Ce n'est pas vrai pour un événement portant sur les **deux** lancers. Par exemple, « la somme vaut au moins 10 » n'est **pas** indépendant de A : on a vu dans la plaquette 1 que la condition faisait passer sa probabilité de $\frac{1}{6}$ à $\frac{1}{2}$.

Réponse. a) $P(A) = \frac{1}{6}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$ — b) $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ — c) oui, le produit vaut $\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 8 – Deux composants en série

On note F_1 et F_2 les événements « le composant i fonctionne pendant un an ».

Arbre pondéré de la situation :



Deux composants indépendants

a) L'appareil fonctionne si les deux composants fonctionnent, soit l'événement $F_1 \cap F_2$. Les composants étant **indépendants**, on multiplie :

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) \times P(F_2) = 0{,}98 \times 0{,}95 = 0{,}931$$

La probabilité que l'appareil fonctionne un an est donc de 0,931.

b) Par l'événement contraire :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(\text{panne}) = 1 - 0{,}931 = 0{,}069$$

Soit 6,9 % de risque de panne dans l'année.

c) La fiabilité de l'appareil (0,931) est **moins bonne** que celle de chacun de ses composants (0,98 et 0,95). C'est une règle générale du montage **en série** : chaque composant supplémentaire ajoute une occasion de panne, donc multiplie la fiabilité par un nombre inférieur à 1.

$$0{,}931 < 0{,}95 < 0{,}98$$

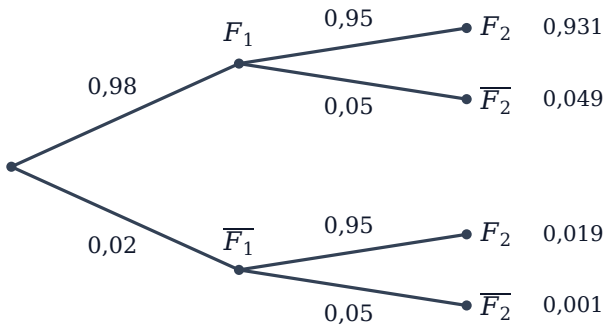
L'implication industrielle. Avec dix composants à 0,98 montés en série, la fiabilité tomberait à $0{,}98^{10} \approx 0{,}817$: près d'une chance sur cinq de panne, alors que chaque pièce est fiable à 98 %. C'est pourquoi les systèmes critiques comportent des redondances — le sujet de l'exercice suivant.

Réponse. a) 0,931 — b) 0,069 — c) moins bonne : en série, la fiabilité est le produit, donc inférieure à chaque facteur.

Correction de l'exercice 9 – Deux composants en parallèle

On note $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ les pannes des deux pompes.

Arbre pondéré de la situation :



Seul le chemin des deux pannes arrête le système

a) Les pannes étant indépendantes, on multiplie :

$$P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = 0{,}02 \times 0{,}05 = 0{,}001$$

Soit une chance sur mille que les deux tombent en panne simultanément.

b) Le système fonctionne dès qu'**au moins une** pompe fonctionne, ce qui est l'événement **contraire** de « les deux sont en panne » :

$$P(\text{système fonctionne}) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$$

c) La meilleure pompe seule a une fiabilité de $1 - 0{,}02 = 0{,}98$; le système en a une de 0,999. La redondance a donc fait passer le risque de défaillance de 2 % à 0,1 %, soit une division par **vingt**.

La différence série / parallèle, en une ligne.

$$\text{série: } P = p_1 \times p_2 \qquad \text{parallèle: } P = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

En série, la fiabilité **baisse** ; en parallèle, elle **monte** au-delà de celle du meilleur élément.

La méthode à retenir. « Au moins un » se traite presque toujours par l'événement **contraire** : « aucun ». C'est le calcul le plus court, et il évite d'additionner plusieurs cas.

La réserve technique. Le calcul suppose les pannes **indépendantes**. Si les deux

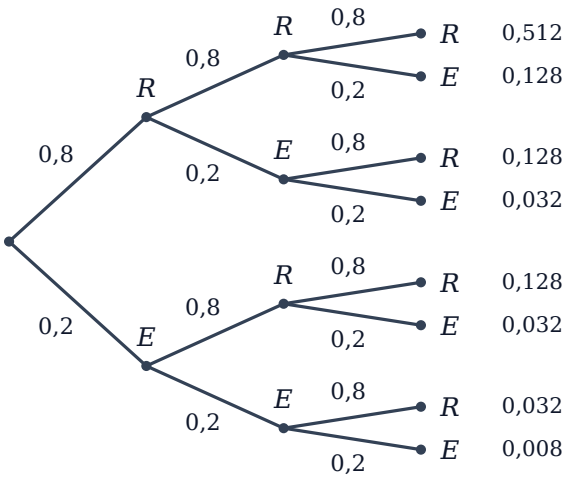
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

pompes partagent la même alimentation électrique, une coupure les arrête toutes les deux : l'indépendance tombe, et la redondance ne protège plus. C'est la limite bien connue des systèmes redondants.

Réponse. a) 0,001 — b) 0,999 — c) le risque passe de 2 % à 0,1 % : la redondance divise le risque par vingt.

Correction de l'exercice 10 – Répétition d'épreuves indépendantes

Arbre pondéré de la situation :



Trois lancers francs (R : réussi, E : échoué)

Les trois tirs étant **indépendants**, la probabilité d'une suite de résultats est le produit des probabilités de chaque tir.

a) Trois réussites :

$$P(\text{3 réussites}) = 0{,}80 \times 0{,}80 \times 0{,}80 = 0{,}80^3 = 0{,}512$$

b) « Au moins un manqué » est l'événement **contraire** de « les trois réussis » :

$$P(\text{au moins un manqué}) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$$

Près d'une chance sur deux, alors que chaque tir individuel est réussi à 80 % : les occasions d'échouer se cumulent.

c) Chaque échec a une probabilité $1 - 0{,}80 = 0{,}20$, donc trois échecs :

$$P(\text{3 manqués}) = 0{,}20^3 = 0{,}008$$

Soit moins d'une chance sur cent.

La formule générale. Pour n épreuves indépendantes de probabilité de succès p :

$$P(n \text{ succès}) = p^n \qquad P(\text{au moins un échec}) = 1 - p^n$$

Le piège de l'intuition. Un joueur à 80 % de réussite manque au moins un tir sur trois dans près de **la moitié** des séries. L'intuition sous-estime toujours ce cumul, parce qu'elle raisonne tir par tir au lieu de considérer la série entière.

Le contrôle. Les huit issues possibles somment à 1 : $0{,}512$ (trois réussis) $+ 3 \times 0{,}8^2 \times 0{,}2 = 0{,}384$ (deux réussis) $+ 3 \times 0{,}8 \times 0{,}04 = 0{,}096$ (un réussi) $+ 0{,}008 = 1{,}000$ ✓

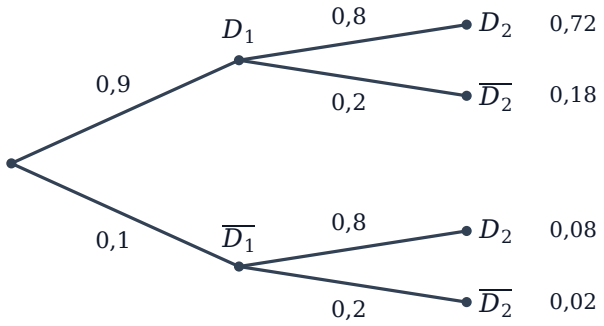
Réponse. a) 0,512 — b) 0,488 — c) 0,008.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Deux contrôles indépendants

On note D_1 et D_2 les détections par chacun des contrôles.

Arbre pondéré de la situation :



Détection par chaque contrôle

a) Ne pas être détecté par le premier a pour probabilité $1 - 0{,}90 = 0{,}10$, et par le second $1 - 0{,}80 = 0{,}20$. Les contrôles étant indépendants :

$$P\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right) = 0{,}10 \times 0{,}20 = 0{,}02$$

Soit 2 % de risque que la pièce passe les deux contrôles sans être repérée.

b) La détection est l’événement contraire :

$$P(D_1 \cup D_2) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$

La pièce est donc détectée dans 98 % des cas, alors qu’aucun contrôle seul n’atteint 90 %.

c) Avec n contrôles identiques à 0,80, la non-détection a pour probabilité $0{,}20^{\,n}$, et l’on veut

$$1 - 0{,}20^{\,n} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}20^{\,n} \leq 0{,}01$$

On teste les valeurs entières :

— $n = 2$: $0{,}20^{2} = 0{,}04 > 0{,}01$;

— $n = 3$: $0{,}20^{3} = 0{,}008 \leq 0{,}01$ ✓

Il faudrait donc **trois** contrôles à 0,80, ce qui donnerait une détection de $1 - 0{,}008 = 0{,}992$.

Le principe industriel. Multiplier les contrôles indépendants fait chuter la probabilité d’échec de façon **géométrique** : chaque contrôle supplémentaire multiplie le risque résiduel par 0,20. Deux contrôles médiocres valent mieux qu’un seul excellent.

La condition indispensable. Tout repose sur l’**indépendance**. Si les deux contrôles utilisent le même appareil mal calibré, ils rateront les mêmes défauts et le calcul s’effondre.

Réponse. a) 0,02 — b) 0,98 — c) trois contrôles, donnant 0,992.

Correction de l’exercice 12 – Déterminer une valeur pour avoir l’indépendance

a) L’indépendance impose exactement

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}50 \times 0{,}30 = 0{,}15$$

b) Sur 400 personnes, cette probabilité correspond à l’effectif

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$400 \times 0{,}15 = 60 \text{ personnes}$$

C'est l'effectif **théorique** de la case croisée sous hypothèse d'indépendance.

c) Avec 72 observés, on a

$$P(A \cap B) = \frac{72}{400} = 0{,}18 \neq 0{,}15$$

Les événements ne sont donc **pas** indépendants. Comme $0{,}18 > 0{,}15$, l'intersection est **plus grande** que ce qu'aurait donné l'indépendance : les deux événements sont liés **positivement**, ils se favorisent.

On peut le confirmer par la conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{0{,}18}{0{,}50} = 0{,}36 > 0{,}30 = P(B)$$

Savoir que A est réalisé fait monter la probabilité de B de 30 % à 36 %.

Le raisonnement en statistique. Comparer l'effectif **observé** à l'effectif **théorique** sous indépendance est exactement la démarche du test d'indépendance du khi-deux, étudié dans l'enseignement supérieur. Ici, l'écart de 12 personnes est ce que ce test mesurerait.

Le vocabulaire à retenir. Observé supérieur au théorique : lien positif. Observé inférieur : lien négatif. Égalité : indépendance.

Réponse. a) $P(A \cap B) = 0{,}15$ — b) 60 personnes — c) non : $0{,}18 > 0{,}15$, les deux événements sont liés positivement.

Correction de l'exercice 13 – Vrai ou faux sur l'indépendance

a) **Faux.** La formule de la réunion est toujours

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

et l'indépendance donne $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, qui est **non nul** dès que les deux probabilités le sont. Il faut donc bien retrancher quelque chose. La formule proposée vaut pour des événements **incompatibles**, pas indépendants.

b) **Vrai.** Incompatibles signifie $P(A \cap B) = 0$, alors que l'indépendance exigerait $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$. Les deux conditions sont contradictoires : ils sont nécessairement dépendants.

c) **Vrai.** C'est l'une des caractérisations du cours. En multipliant par $P(A)$:

$$P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

On retrouve exactement la définition.

d) **Vrai.** On teste :

$$P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B)$$

L'égalité est vérifiée, donc les événements sont indépendants.

Le tri à mémoriser. Incompatibles ⇒ on additionne pour la **réunion**. Indépendants ⇒ on multiplie pour l'**intersection**. Ce sont deux propriétés différentes, pour deux opérations différentes — et c'est la confusion la plus sanctionnée du chapitre.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) vrai — d) vrai.

Correction de l'exercice 14 – Tirages avec et sans remise

L'urne contient 10 boules, dont 6 blanches.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) **Avec remise**, la composition est identique aux deux tirages : la probabilité de tirer une blanche est $\frac{6}{10} = 0{,}6$ à chaque fois. Les deux tirages sont **indépendants** (la première boule est remise, l'urne est inchangée), donc

$$P(B_1 \cap B_2) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$$

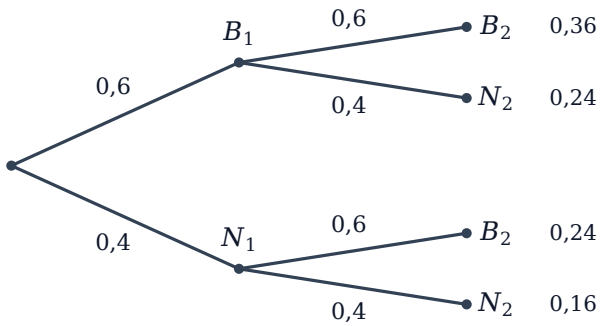
On vérifie l'indépendance : $P_{B_1}(B_2) = 0{,}6 = P(B_2)$ ✓

b) **Sans remise**, l'urne ne contient plus que 9 boules après le premier tirage, dont 5 blanches si la première était blanche :

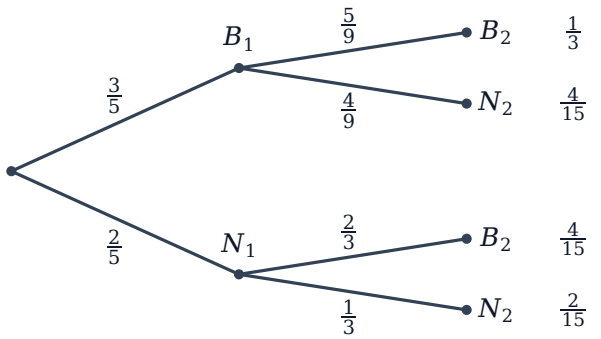
$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

Les deux tirages ne sont **pas** indépendants : $P_{B_1}(B_2) = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$, alors que $P(B_2) = 0{,}6$. Le premier tirage a modifié la probabilité du second.

Les deux arbres : avec remise, les branches du second niveau sont identiques ; sans remise, elles dépendent du premier tirage.



Avec remise



Sans remise

c) Les deux résultats sont 0,36 et 0,333 : le tirage **sans** remise donne une probabilité **plus faible** d'obtenir deux blanches.

L'explication est directe : retirer une blanche appauvrit l'urne en blanches, donc la seconde blanche devient moins probable ($\frac{5}{9}$ au lieu de $\frac{6}{10}$). Avec remise, l'urne « oublie » le premier tirage.

Le critère à retenir. Avec remise : tirages **indépendants**, on multiplie des probabilités identiques. Sans remise : tirages **dépendants**, on multiplie en actualisant la composition. C'est la première question à se poser devant un énoncé d'urne.

Réponse. a) 0,36, tirages indépendants — b) $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$, tirages dépendants — c) le sans remise donne moins, car retirer une blanche appauvrit l'urne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : un système de sécurité

On note A, M et C les déclenchements des trois dispositifs, de probabilités 0,92, 0,85 et 0,78, et de non-déclenchements 0,08, 0,15 et 0,22.

a) Les trois dispositifs étant **indépendants**, on multiplie les trois non-déclenchements :

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{M} \cap \overline{C}\right) = 0{,}08 \times 0{,}15 \times 0{,}22 = 0{,}002\,64$$

Soit environ 0,26 % de risque qu’une intrusion passe totalement inaperçue.

b) Par l’événement contraire :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - 0{,}002\,64 = 0{,}997\,36$$

Soit 99,74 % de détection.

c) Les trois se déclenchent :

$$P(A \cap M \cap C) = 0{,}92 \times 0{,}85 \times 0{,}78 = 0{,}610 \text{ (à } 10^{-3})$$

Détail : $0{,}92 \times 0{,}85 = 0{,}782$, puis $0{,}782 \times 0{,}78 = 0{,}609\,96$.

d) « Exactement un » se décompose en trois cas incompatibles, selon lequel se déclenche :

$$0{,}92 \times 0{,}15 \times 0{,}22 = 0{,}030\,36$$

$$0{,}08 \times 0{,}85 \times 0{,}22 = 0{,}014\,96$$

$$0{,}08 \times 0{,}15 \times 0{,}78 = 0{,}009\,36$$

On additionne, puisque les trois cas s’excluent :

$$0{,}030\,36 + 0{,}014\,96 + 0{,}009\,36 = 0{,}054\,68$$

Soit environ 5,47 % des intrusions détectées par un seul dispositif.

e) L’objectif de 99,9 % n’est **pas** atteint : la détection actuelle est de 99,74 %, donc le risque résiduel de 0,26 % dépasse le seuil toléré de 0,1 %.

Deux pistes, chiffrées. **Ajouter un quatrième dispositif** de probabilité p : il faut

$$0{,}002\,64 \times (1 - p) \leq 0{,}001 \Leftrightarrow 1 - p \leq 0{,}379 \Leftrightarrow p \geq 0{,}621$$

Un dispositif même médiocre, détectant seulement 63 % des intrusions, suffirait donc à atteindre l’objectif. **Ou améliorer la caméra** : en portant son taux à p, il faudrait $0{,}08 \times 0{,}15 \times (1 - p) \leq 0{,}001$, soit $1 - p \leq 0{,}083$, donc $p \geq 0{,}917$ — beaucoup plus exigeant.

Conclusion : **ajouter un dispositif** est bien plus efficace que perfectionner un existant.

La réserve essentielle. Tout le calcul repose sur l’**indépendance** des trois dispositifs. S’ils partagent la même alimentation ou le même boîtier de transmission, une panne unique les neutralise tous, et la protection réelle s’effondre bien en dessous de 99,74 %.

Le bilan de la plaquette. L’indépendance se **teste** ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$) ou se **donne** par le contexte ; elle autorise alors la multiplication pour les intersections, et « au moins un » se calcule toujours par le contraire « aucun ».

Réponse. a) 0,002 64 — b) 0,997 36 — c) environ 0,610 — d) environ 0,054 68 — e) non (99,74 % au lieu de 99,9 %) ; un quatrième dispositif à 63 % suffirait, alors qu’améliorer la caméra exigerait 91,7 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).