Plaquette 5 – Synthèse : problèmes complets

Probabilités conditionnelles — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résoudre un problème complet de probabilités conditionnelles.

— **1. Traduire** chaque phrase de l'énoncé : « x % des … » donne une probabilité **simple**, « parmi les … » une **conditionnelle**, « … et … » une **intersection**.

— **2. Construire l'arbre** : premier niveau avec la partition, second niveau avec les conditionnelles. Ou un **tableau croisé** si l'énoncé donne des effectifs.

— **3. Chemins** : on multiplie le long de chaque chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

— **4. Probabilités totales** : on additionne les chemins qui réalisent l'événement.

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}(B)$$

— **5. Inversion** de la conditionnelle :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

— **6. Interprétation** : une phrase en français précisant **quelle population** sert de référence.

— **Indépendance** : à tester par $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ou donnée par le contexte (épreuves répétées, tirages avec remise).

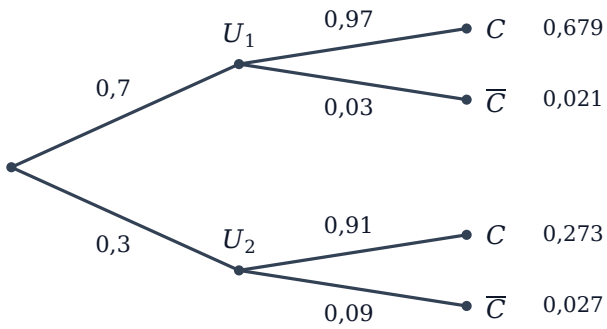
— **« Au moins un »** : presque toujours par l'événement **contraire** « aucun ».

— **Les contrôles à faire** : somme des chemins égale à 1 ; somme des conditionnelles inversées sur une partition égale à 1 ; toute probabilité comprise entre 0 et 1 ; $P(B)$ encadrée par les conditionnelles $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.

Correction de l'exercice 1 – Deux usines de smartphones

On note U_1 l'origine et C l'événement « l'appareil est conforme ».

Arbre pondéré de la situation :



Usine puis conformité

a) La formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(U_1)P_{U_1}(C) + P(U_2)P_{U_2}(C)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(C) = 0{,}70 \times 0{,}97 + 0{,}30 \times 0{,}91 = 0{,}679 + 0{,}273 = 0{,}952$$

Soit 95,2 % d'appareils conformes.

b) Par l'événement contraire : $P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}952 = 0{,}048$.

On peut le vérifier par les chemins : $0{,}70 \times 0{,}03 + 0{,}30 \times 0{,}09 = 0{,}021 + 0{,}027 = 0{,}048$ ✓

c) On inverse la conditionnelle :

$$P_{\overline{C}}(U_1) = \frac{P\left(U_1 \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0{,}021}{0{,}048} = 0{,}4375$$

Soit 43,75 % des appareils non conformes qui viennent de U_1.

La lecture pour le fabricant. U_1 produit 70 % des appareils mais seulement 43,75 % des défauts : elle est bien la plus fiable. À l'inverse, U_2 produit 30 % des appareils et 56,25 % des défauts — c'est sur elle qu'il faut agir.

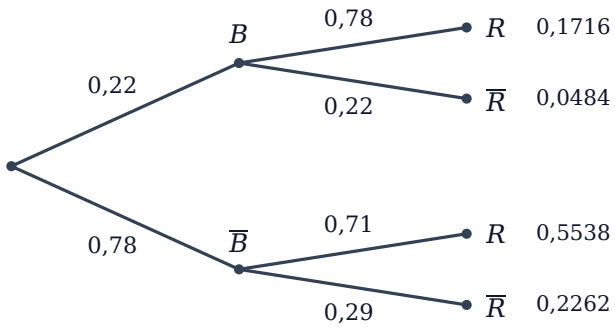
Le contrôle. $P_{\overline{C}}(U_2) = \frac{0{,}027}{0{,}048} = 0{,}5625$, et $0{,}4375 + 0{,}5625 = 1$ ✓

Réponse. a) $P(C) = 0{,}952$ — b) 0,048 — c) 0,4375, soit 43,75 %.

Correction de l'exercice 2 – Bourses et réussite à l'examen

On note B l'événement « l'étudiant est boursier » et R « il réussit l'examen ».

Arbre pondéré de la situation :



Boursier ou non, puis réussite

a) La formule des probabilités totales :

$$P(R) = 0{,}22 \times 0{,}78 + 0{,}78 \times 0{,}71 = 0{,}171\,6 + 0{,}553\,8 = 0{,}725\,4$$

Le taux de réussite global est donc d'environ 72,5 %.

b) On inverse la conditionnelle :

$$P_R(B) = \frac{0{,}171\,6}{0{,}725\,4} \approx 0{,}237$$

Environ 23,7 % des étudiants ayant réussi sont boursiers.

c) Les boursiers représentent 22 % de l'université et 23,7 % des reçus : ils sont donc **légèrement surreprésentés** parmi les reçus, ce qui est cohérent avec leur meilleur taux de réussite (78 % contre 71 %).

L'écart reste faible (1,7 point) parce que les deux taux de réussite sont proches : quand les conditionnelles sont voisines, la répartition dans la sous-population reste proche de la répartition initiale.

Le principe général. Une sous-population est surreprésentée parmi les « succès » si et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

seulement si son taux de succès dépasse le taux global. Ici 78 % > 72,5 %, donc surreprésentation ✓

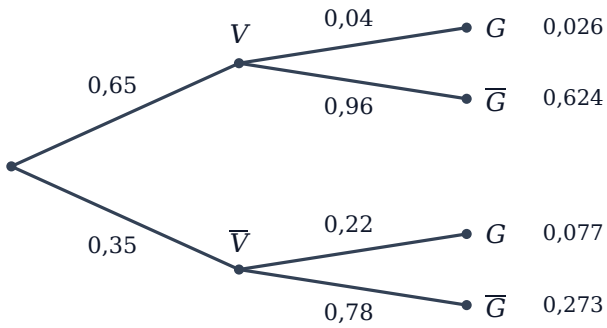
La mise en garde. Ces chiffres ne disent rien d'un lien causal entre bourse et réussite : le statut de boursier est corrélé à bien d'autres facteurs (filière, assiduité, temps disponible), et seule une étude spécifique pourrait démêler leurs effets.

Réponse. a) environ 72,5 % — b) environ 23,7 % — c) légère surreprésentation (23,7 % contre 22 %), cohérente avec un meilleur taux de réussite.

Correction de l'exercice 3 – Vaccination et grippe

On note V l'événement « la personne est vaccinée » et G « elle contracte la grippe ».

Arbre pondéré de la situation :



Vaccination puis grippe

a) La formule des probabilités totales :

$$P(G) = 0{,}65 \times 0{,}04 + 0{,}35 \times 0{,}22 = 0{,}026 + 0{,}077 = 0{,}103$$

Soit 10,3 % de la population qui contracte la grippe.

b) On inverse la conditionnelle :

$$P_G(V) = \frac{0{,}026}{0{,}103} \approx 0{,}252$$

Environ 25,2 % des malades étaient vaccinés — le titre du journal est donc **numériquement exact**.

c) L'argument est pourtant **faux**, et il confond deux conditionnelles inversées.

La bonne comparaison est celle des **taux de maladie dans chaque groupe** :

$$P_V(G) = 0{,}04 \qquad P_{\overline{V}}(G) = 0{,}22$$

Un non-vacciné a 5,5 fois plus de risques de tomber malade qu'un vacciné : le vaccin est très efficace.

Si les vaccinés représentent tout de même un quart des malades, c'est parce qu'ils sont **beaucoup plus nombreux** (65 % de la population). Un petit pourcentage d'un grand groupe peut dépasser un grand pourcentage d'un petit groupe — et ici il n'en représente même qu'un quart.

Le contrôle. $P_G\left(\overline{V}\right) = \frac{0{,}077}{0{,}103} \approx 0{,}748$, et $0{,}252 + 0{,}748 = 1$ ✓ Les non-vaccinés, qui ne sont que 35 % de la population, fournissent 75 % des malades.

Ce que l'exercice enseigne. « Quelle proportion des malades était vaccinée ? » et « quel est le risque de tomber malade quand on est vacciné ? » sont deux questions distinctes. Seule la seconde mesure l'efficacité du vaccin.

Réponse. a) $P(G) = 0{,}103$ — b) environ 25,2 % — c) l'argument confond $P_G(V)$ et $P_V(G)$:

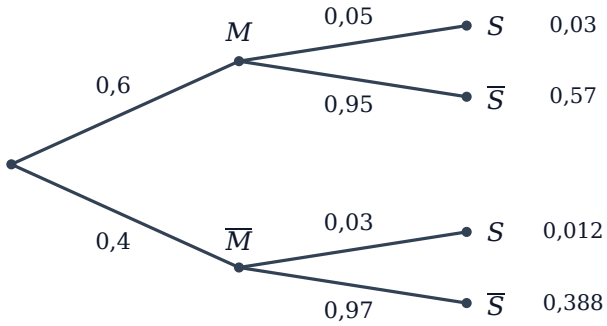
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

le risque de maladie est de 4 % chez les vaccinés contre 22 % chez les autres.

Correction de l’exercice 4 – Sinistres en assurance habitation

On note M l’événement « le logement est une maison » et S « il subit un sinistre ».

Arbre pondéré de la situation :



Maison ou appartement, puis sinistre

a) La formule des probabilités totales :

$$P(S) = 0{,}60 \times 0{,}05 + 0{,}40 \times 0{,}03 = 0{,}030 + 0{,}012 = 0{,}042$$

Soit 4,2 % des logements sinistrés dans l’année.

b) On inverse la conditionnelle :

$$P_S(M) = \frac{0{,}030}{0{,}042} = \frac{5}{7} \approx 0{,}714$$

Environ 71,4 % des logements sinistrés sont des maisons, alors qu’elles ne représentent que 60 % du portefeuille : elles sont surreprésentées, ce qui découle de leur taux de sinistre plus élevé.

c) Sur 25 000 logements :

$$25\,000 \times 0{,}042 = 1\,050 \text{ sinistres}$$

dont, pour les appartements :

$$25\,000 \times 0{,}012 = 300 \text{ sinistres}$$

Contrôle : $\frac{300}{1\,050} \approx 0{,}286$, et $0{,}714 + 0{,}286 = 1$ ✓

La lecture tarifaire. Les maisons représentent 60 % des contrats mais 71,4 % des sinistres : à prime égale, elles seraient déficitaires. C’est le calcul qui justifie une prime plus élevée pour les maisons — le rapport des taux de sinistre étant $\frac{0{,}05}{0{,}03} \approx 1{,}67$.

La méthode, en une phrase. Probabilités totales pour le taux global, inversion pour la répartition des sinistres, multiplication par l’effectif pour les nombres attendus.

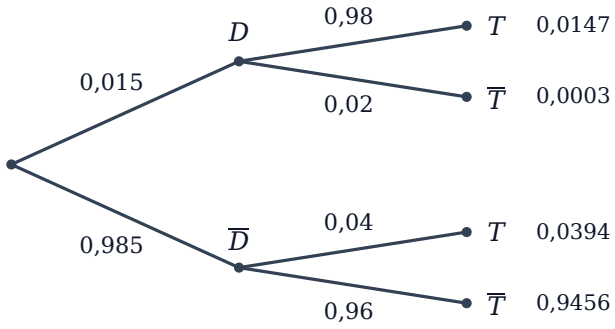
Réponse. a) $P(S) = 0{,}042$ — b) environ 71,4 % — c) 1 050 sinistres, dont 300 appartements.

Correction de l’exercice 5 – Un contrôle antidopage

On note D l’événement « l’athlète est dopé » et T « le contrôle est positif ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Dopé ou non, puis contrôle

a) La formule des probabilités totales :

$$P(T) = 0{,}015 \times 0{,}98 + 0{,}985 \times 0{,}04 = 0{,}014\,7 + 0{,}039\,4 = 0{,}054\,1$$

Soit 5,41 % de contrôles positifs.

b) On inverse la conditionnelle :

$$P_T(D) = \frac{0{,}014\,7}{0{,}054\,1} \approx 0{,}272$$

Un athlète contrôlé positif n'a donc qu'environ 27,2 **%** de chances d'être réellement dopé.

c) Le résultat est préoccupant : près de **trois positifs sur quatre** seraient des athlètes non dopés, injustement mis en cause.

La raison est celle déjà rencontrée pour le dépistage médical : les non-dopés représentent 98,5 % des athlètes, et même un taux de faux positifs de seulement 4 % produit

$$0{,}985 \times 0{,}04 = 0{,}039\,4$$

soit presque trois fois plus de faux positifs que de vrais positifs (0,014 7).

Sur le plan de la justice sportive, cela impose deux règles, effectivement appliquées : un contrôle positif est toujours suivi d'une **contre-analyse** sur un second échantillon, et la sanction n'intervient qu'après confirmation. Un test unique ne peut pas fonder une sanction.

Le contrôle. $P_T\left(\overline{D}\right) = \frac{0{,}039\,4}{0{,}054\,1} \approx 0{,}728$, et $0{,}272 + 0{,}728 = 1$ ✓

L'effet d'une contre-analyse. Si la seconde analyse, indépendante, a les mêmes caractéristiques, un double positif donne $P \approx \frac{0{,}015 \times 0{,}98^2}{0{,}015 \times 0{,}98^2 + 0{,}985 \times 0{,}04^2} \approx 0{,}90$: la fiabilité passe de 27 % à 90 %.

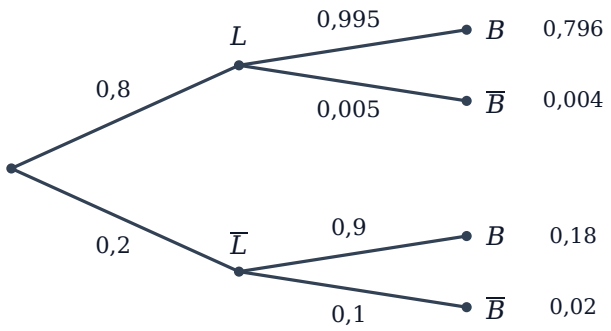
Réponse. a) $P(T) = 0{,}054\,1$ — b) $P_T(D) \approx 0{,}272$ — c) trois positifs sur quatre seraient des non-dopés : la contre-analyse est indispensable.

Correction de l'exercice 6 – Une machine de tri postal

On note L l'événement « l'adresse est bien lisible » et B « le courrier est bien trié ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Lisibilité puis tri

a) La formule des probabilités totales :

$$P(B) = 0{,}80 \times 0{,}995 + 0{,}20 \times 0{,}90 = 0{,}796 + 0{,}180 = 0{,}976$$

Soit 97,6 % de courriers bien triés.

b) Les erreurs ont pour probabilité $P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}976 = 0{,}024$. Les deux chemins qui y mènent :

$$P\left(L \cap \overline{B}\right) = 0{,}80 \times 0{,}005 = 0{,}004 \qquad P\left(\overline{L} \cap \overline{B}\right) = 0{,}20 \times 0{,}10 = 0{,}020$$

D'où l'inversion :

$$P_{\overline{B}}(L) = \frac{0{,}004}{0{,}024} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

Environ 16,7 % des erreurs concernent des adresses pourtant bien lisibles.

c) Sur 200 000 courriers :

$$200\,000 \times 0{,}024 = 4\,800 \text{ erreurs}$$

dont $200\,000 \times 0{,}004 = 800$ sur des adresses lisibles, et $200\,000 \times 0{,}020 = 4\,000$ sur des adresses mal écrites.

Où agir. Les adresses mal écrites représentent 20 % du courrier mais 83,3 % des erreurs : améliorer la reconnaissance des écritures difficiles est bien plus rentable que perfectionner un traitement déjà à 99,5 %.

On peut le chiffrer : porter le taux des mal écrits de 90 % à 95 % ferait gagner $0{,}20 \times 0{,}05 = 0{,}010$, soit 2 000 erreurs évitées. Porter celui des lisibles de 99,5 % à 100 % — la perfection — n'en éviterait que 800.

Le contrôle. $0{,}004 + 0{,}020 = 0{,}024 = P\left(\overline{B}\right)$ ✓

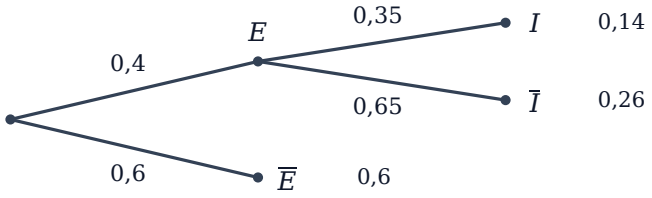
Réponse. a) $P(B) = 0{,}976$ — b) environ 16,7 % — c) 4 800 erreurs, dont 4 000 sur des adresses mal écrites.

Correction de l'exercice 7 – Un recrutement en deux étapes

On note E l'événement « réussir le test écrit » et I « être retenu à l'entretien ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Il faut franchir les deux étapes

a) Être embauché correspond à l'intersection $E \cap I$. La formule du produit s'applique, la seconde probabilité étant **conditionnelle** au fait d'avoir réussi l'écrit :

$$P(E \cap I) = P(E) \times P_E(I) = 0{,}40 \times 0{,}35 = 0{,}14$$

La probabilité d'être embauché est donc de 14 %.

b) Sur 250 candidats :

$$250 \times 0{,}14 = 35 \text{ embauches}$$

c) On cherche le nombre n de candidats tel que $0{,}14n \geq 50$:

$$n \geq \frac{50}{0{,}14} \approx 357{,}1$$

L'entreprise doit donc recevoir au moins 358 **candidats**. Contrôle : $358 \times 0{,}14 = 50{,}12$ embauches attendues ✓ tandis que $357 \times 0{,}14 = 49{,}98$ resterait juste en dessous.

Pourquoi on arrondit vers le haut. L'objectif est d'**atteindre au moins** 50 embauches : il faut donc le premier entier qui dépasse le seuil. Arrondir à 357 « au plus proche » manquerait la cible.

La remarque sur l'indépendance. Le calcul de a) **n'utilise pas** l'indépendance : il utilise la formule du produit avec une conditionnelle, ce qui est toujours valable. C'est heureux, car les deux étapes sont probablement dépendantes — un bon candidat à l'écrit est souvent meilleur à l'entretien. L'énoncé donne d'ailleurs bien $P_E(I)$, et non $P(I)$.

L'ordre de grandeur à retenir. Un processus en deux étapes multiplie les taux : deux filtres à 40 % et 35 % ne laissent passer que 14 % des candidats.

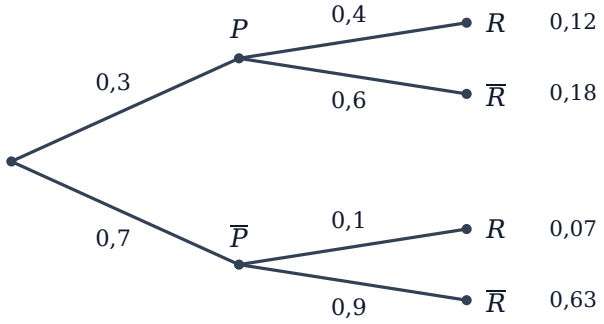
Réponse. a) $P(E \cap I) = 0{,}14$ — b) 35 embauches — c) au moins 358 candidats.

Correction de l'exercice 8 – Météo et retards de livraison

On note P l'événement « il pleut » et R « la livraison est en retard ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Pluie (P) ou non, puis retard

a) La formule des probabilités totales :

$$P(R) = 0{,}30 \times 0{,}40 + 0{,}70 \times 0{,}10 = 0{,}12 + 0{,}07 = 0{,}19$$

Soit 19 % de livraisons en retard.

b) On inverse la conditionnelle :

$$P_R(P) = \frac{0{,}12}{0{,}19} = \frac{12}{19} \approx 0{,}632$$

Il y a donc environ 63,2 % de chances qu'il ait plu, sachant que la livraison est en retard.

c) Oui, mais il faut être précis : la pluie est **présente** dans 63,2 % des retards, ce qui en fait effectivement le facteur majoritaire. Les jours de pluie ne représentent que 30 % des jours mais concentrent près des deux tiers des retards.

Attention toutefois à ne pas surinterpréter : 37 % des retards se produisent **sans pluie**, donc d'autres causes existent (trafic, pannes, volume de commandes). Et même un jour de pluie, 60 % des livraisons arrivent à l'heure.

Le contrôle. $P_R\left(\overline{P}\right) = \frac{0{,}07}{0{,}19} \approx 0{,}368$, et $0{,}632 + 0{,}368 = 1$ ✓

L'usage logistique. Ce calcul justifie d'adapter les tournées les jours de pluie annoncée : c'est là que le gain potentiel est le plus grand. Mais réduire à zéro les retards liés à la pluie ne supprimerait que 63 % du problème.

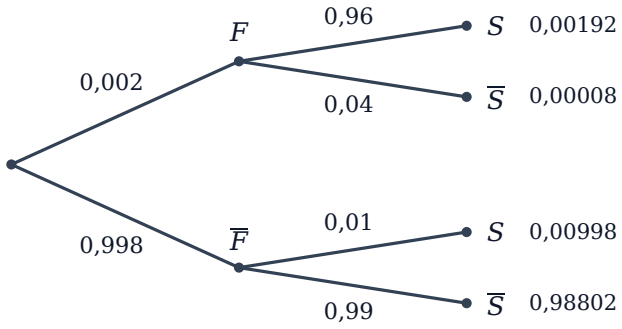
Réponse. a) $P(R) = 0{,}19$ — b) environ 63,2 % — c) oui, la pluie est présente dans près des deux tiers des retards, mais 37 % ont une autre cause.

Correction de l'exercice 9 – Détection de fraude bancaire

On note F l'événement « la transaction est frauduleuse » et S « elle est signalée ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Fraude ou non, puis signalement

a) La formule des probabilités totales :

$$P(S) = 0{,}002 \times 0{,}96 + 0{,}998 \times 0{,}01 = 0{,}001\,92 + 0{,}009\,98 = 0{,}011\,9$$

Soit 1,19 % des transactions signalées.

b) On inverse la conditionnelle :

$$P_S(F) = \frac{0{,}001\,92}{0{,}011\,9} \approx 0{,}161$$

Une transaction signalée n’est frauduleuse que dans environ 16,1 **%** des cas.

c) Sur 1 million de transactions :

$$1\,000\,000 \times 0{,}011\,9 = 11\,900 \text{ alertes}$$

dont de vraies fraudes :

$$1\,000\,000 \times 0{,}001\,92 = 1\,920$$

Il y a donc 9 980 **fausses alertes** pour 1 920 vraies fraudes, soit plus de cinq fausses alertes par fraude détectée.

Le problème opérationnel. Traiter 11 900 alertes par million de transactions coûte cher, et cinq alertes sur six sont inutiles — sans compter la gêne infligée aux clients dont le paiement est bloqué. C’est le dilemme permanent de la détection d’événements **rares**.

Les deux leviers. Réduire le taux de fausse alerte est bien plus efficace que d’améliorer la détection. Passer de 1 % à 0,2 % de faux positifs donnerait

$$P(S) = 0{,}001\,92 + 0{,}998 \times 0{,}002 = 0{,}003\,916 \quad \text{et} \quad P_S(F) \approx 0{,}490$$

soit une alerte sur deux pertinente, contre une sur six aujourd’hui. À l’inverse, porter la détection de 96 % à 100 % ne changerait presque rien.

Le contrôle. $P_S\left(\overline{F}\right) = \frac{0{,}009\,98}{0{,}011\,9} \approx 0{,}839$, et $0{,}161 + 0{,}839 = 1$ ✓

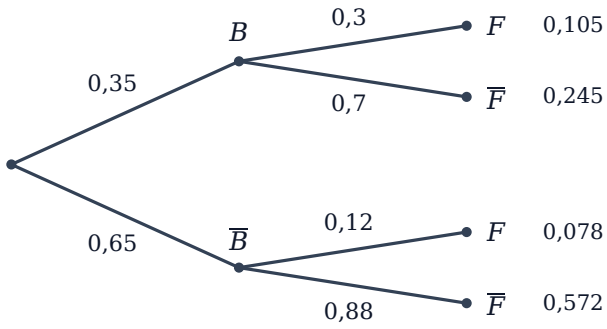
Réponse. a) $P(S) = 0{,}011\,9$ — b) $P_S(F) \approx 0{,}161$ — c) 11 900 alertes pour 1 920 vraies fraudes.

Correction de l’exercice 10 – Deux modes de culture

On note B l’événement « la parcelle est biologique » et F « son rendement est faible ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Biologique ou non, puis rendement faible

a) La formule des probabilités totales :

$$P(F) = 0{,}35 \times 0{,}30 + 0{,}65 \times 0{,}12 = 0{,}105 + 0{,}078 = 0{,}183$$

Soit 18,3 % de parcelles à faible rendement.

b) On inverse la conditionnelle :

$$P_F(B) = \frac{0{,}105}{0{,}183} \approx 0{,}574$$

Environ 57,4 % des parcelles à faible rendement sont biologiques.

c) L'écart est considérable : le biologique représente 35 % des parcelles mais 57,4 % des faibles rendements, soit une surreprésentation de plus de 22 points.

L'explication est directe : le taux de faible rendement est 2,5 fois plus élevé en biologique (30 % contre 12 %). Cette différence de taux l'emporte largement sur la différence d'effectif, d'où le renversement de majorité.

Il faut cependant se garder d'en conclure quoi que ce soit sur la « qualité » de ce mode de culture : un rendement plus faible peut être compensé par un prix de vente supérieur, des coûts d'intrants moindres et d'autres bénéfices non mesurés ici. Le calcul décrit une répartition, pas une performance économique.

Le contrôle. $P_F\left(\overline{B}\right) = \frac{0{,}078}{0{,}183} \approx 0{,}426$, et $0{,}574 + 0{,}426 = 1$ ✓

La règle de surreprésentation, vérifiée. $P_B(F) = 0{,}30 > 0{,}183 = P(F)$, donc le biologique est surreprésenté parmi les faibles rendements ✓

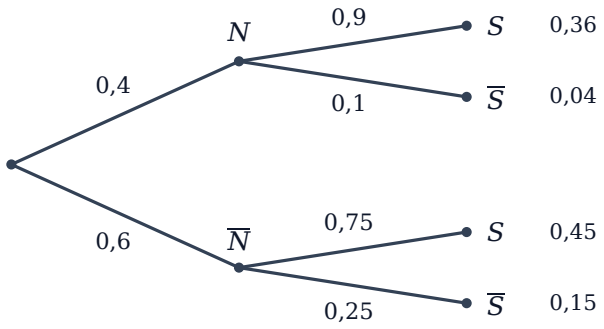
Réponse. a) $P(F) = 0{,}183$ — b) environ 57,4 % — c) surreprésentation de 22 points, due à un taux 2,5 fois plus élevé.

Correction de l'exercice 11 – Enquête de satisfaction

On note N l'événement « le client est nouveau » et S « il est satisfait ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



Nouveau client ou non, puis satisfaction

a) La formule des probabilités totales :

$$P(S) = 0{,}40 \times 0{,}90 + 0{,}60 \times 0{,}75 = 0{,}36 + 0{,}45 = 0{,}81$$

Le taux de satisfaction global est donc de 81 %.

b) On inverse la conditionnelle :

$$P_S(N) = \frac{0{,}36}{0{,}81} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$$

Environ 44,4 % des clients satisfaits sont des nouveaux clients, alors qu'ils ne représentent que 40 % de la clientèle : légère surreprésentation, cohérente avec leur meilleur taux de satisfaction.

c) Les insatisfaits ont pour probabilité $1 - 0{,}81 = 0{,}19$. Les deux chemins :

$$P\left(N \cap \overline{S}\right) = 0{,}40 \times 0{,}10 = 0{,}04 \qquad P\left(\overline{N} \cap \overline{S}\right) = 0{,}60 \times 0{,}25 = 0{,}15$$

D'où

$$P_{\overline{S}}\left(\overline{N}\right) = \frac{0{,}15}{0{,}19} \approx 0{,}789$$

Environ 78,9 **%** des clients insatisfaits sont des clients anciens, pour 60 % de la clientèle : la surreprésentation est cette fois très marquée.

La lecture managériale. Les anciens clients concentrent près de 79 % des insatisfactions. C'est un signal d'alerte classique : la qualité perçue se dégrade avec l'ancienneté, soit par lassitude, soit parce que l'effort commercial se concentre sur l'acquisition de nouveaux clients.

Le contrôle croisé. $P_{\overline{S}}(N) = \frac{0{,}04}{0{,}19} \approx 0{,}211$, et $0{,}789 + 0{,}211 = 1$ ✓ Et la somme des quatre chemins : $0{,}36 + 0{,}04 + 0{,}45 + 0{,}15 = 1{,}00$ ✓

Réponse. a) 81 % — b) environ 44,4 % — c) environ 78,9 % des insatisfaits sont des clients anciens.

Correction de l'exercice 12 – Trois composants en série

a) Les composants étant **indépendants**, la probabilité que les trois fonctionnent est le produit :

$$P = 0{,}99 \times 0{,}97 \times 0{,}95$$

On calcule par étapes : $0{,}99 \times 0{,}97 = 0{,}960\,3$, puis $0{,}960\,3 \times 0{,}95 = 0{,}912\,285$.

$$P \approx 0{,}912\,3$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Par l'événement contraire :

$$P(\text{panne}) = 1 - 0{,}912\,3 = 0{,}087\,7$$

Soit 8,77 % de risque de panne, alors que le composant le moins fiable est à 5 % de risque seulement.

c) Avec un quatrième composant en série :

$$P = 0{,}912\,285 \times 0{,}99 \approx 0{,}903\,2$$

La fiabilité **baisse** encore, de 0,912 3 à 0,903 2. C'est la règle du montage en série : chaque composant ajouté multiplie la fiabilité par un nombre inférieur à 1, donc la dégrade — même s'il est excellent.

La leçon de conception. Un système en série est plus fragile que son composant le plus faible. Avec vingt composants à 0,99, la fiabilité tomberait à $0{,}99^{20} \approx 0{,}818$: près d'une chance sur cinq de panne, alors que chaque pièce est fiable à 99 %.

Le contraste avec le parallèle. Si le quatrième composant avait été monté **en parallèle** d'un composant existant (en redondance), la fiabilité aurait **augmenté** au lieu de baisser. Série et parallèle ont des effets opposés, et c'est tout l'art de la conception d'un système sûr.

Réponse. a) environ 0,912 3 — b) environ 0,087 7 — c) 0,903 2 : la fiabilité baisse, car chaque composant en série la multiplie par un facteur inférieur à 1.

Correction de l'exercice 13 – Tableau croisé et indépendance

a) Chaque probabilité est un quotient par 500 :

$$P(S) = \frac{300}{500} = 0{,}60 \qquad P(L) = \frac{200}{500} = 0{,}40 \qquad P(S \cap L) = \frac{120}{500} = 0{,}24$$

b) On teste la définition de l'indépendance :

$$P(S) \times P(L) = 0{,}60 \times 0{,}40 = 0{,}24 = P(S \cap L)$$

L'égalité est vérifiée : les deux pratiques sont **indépendantes**. Faire du sport n'a aucun lien statistique, dans cet échantillon, avec le fait de lire la presse.

c) Les deux conditionnelles :

$$P_S(L) = \frac{120}{300} = 0{,}40 \qquad P_{\overline{S}}(L) = \frac{80}{200} = 0{,}40$$

Les deux valent $0{,}40 = P(L)$: la proportion de lecteurs est **identique** chez les sportifs et chez les non-sportifs. La condition n'apporte strictement aucune information, ce qui confirme l'indépendance ✓

Comment reconnaître un tableau « indépendant ». Les lignes sont **proportionnelles** entre elles : $\frac{120}{180} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$. C'est la signature visuelle de l'indépendance sur un tableau croisé, et elle se repère en un coup d'œil.

L'effectif théorique. Sous indépendance, la case croisée devrait valoir $\frac{300 \times 200}{500} = 120$: c'est exactement l'effectif observé. Toute autre valeur aurait signalé une dépendance.

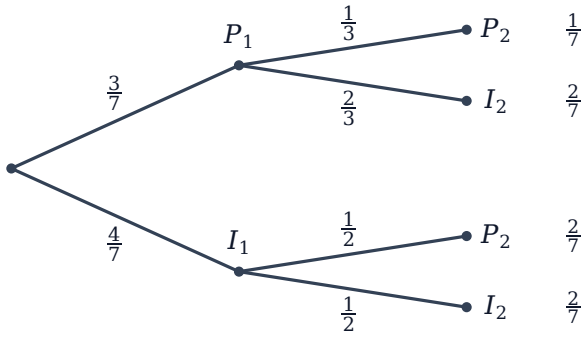
Réponse. a) 0,60 ; 0,40 ; 0,24 — b) oui : $0{,}60 \times 0{,}40 = 0{,}24$ — c) $P_S(L) = P_{\overline{S}}(L) = 0{,}40 = P(L)$ ✓

Correction de l'exercice 14 – Deux tirages dans une urne

Les jetons pairs sont 2, 4 et 6, soit 3 jetons sur 7 ; les impairs sont 1, 3, 5, 7, soit 4 jetons.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Arbre pondéré de la situation :



P : numéro pair, I : impair (sans remise)

a) Au premier tirage, les sept jetons sont équiprobables :

$$P(A_1) = \frac{3}{7}$$

où A_1 désigne « le premier jeton est pair ».

b) Sachant que le premier est pair, il reste 6 jetons dont 2 pairs, donc

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Par la formule du produit :

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$$

c) Sachant que le premier jeton était **impair**, il reste 6 jetons dont les 3 pairs sont tous encore présents :

$$P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

La dépendance, bien visible. Les deux conditionnelles du second niveau diffèrent : $\frac{1}{3}$ après un pair, $\frac{1}{2}$ après un impair. Le premier tirage modifie donc la probabilité du second, qui n'est pas indépendant — c'est la signature du tirage **sans remise**.

Le contrôle par les probabilités totales. On peut calculer $P(A_2)$:

$$P(A_2) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

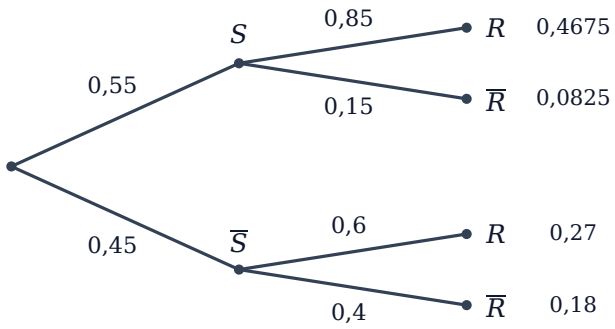
Curieusement, $P(A_2) = P(A_1) = \frac{3}{7}$: **sans** information sur le premier tirage, le second a exactement la même probabilité d'être pair. C'est logique par symétrie — rien ne distingue la première position de la seconde tant qu'on n'a rien observé.

Réponse. a) $\frac{3}{7}$ — b) $\frac{1}{7} \approx 0{,}143$ — c) $\frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse finale : un centre d’appels

Arbre pondéré de la situation :



Type de demande puis résolution au premier appel

a) Les données :

$$P(S) = 0{,}55 \qquad P\left(\overline{S}\right) = 0{,}45$$

$$P_S(R) = 0{,}85 \qquad P_{\overline{S}}(R) = 0{,}60$$

b) On complète les branches ($P_S\left(\overline{R}\right) = 0{,}15$ et $P_{\overline{S}}\left(\overline{R}\right) = 0{,}40$), puis on multiplie :

$$P(S \cap R) = 0{,}55 \times 0{,}85 = 0{,}467\,5 \qquad P\left(S \cap \overline{R}\right) = 0{,}55 \times 0{,}15 = 0{,}082\,5$$

$$P\left(\overline{S} \cap R\right) = 0{,}45 \times 0{,}60 = 0{,}270 \qquad P\left(\overline{S} \cap \overline{R}\right) = 0{,}45 \times 0{,}40 = 0{,}180$$

Somme : $0{,}467\,5 + 0{,}082\,5 + 0{,}270 + 0{,}180 = 1{,}000$ ✓

c) La formule des probabilités totales :

$$P(R) = 0{,}467\,5 + 0{,}270 = 0{,}737\,5$$

Soit 73,75 % des demandes résolues dès le premier appel.

d) On inverse la conditionnelle :

$$P_R(S) = \frac{0{,}467\,5}{0{,}737\,5} \approx 0{,}634$$

Environ 63,4 % des demandes résolues au premier appel étaient simples, pour 55 % de demandes simples reçues : surreprésentation cohérente avec leur meilleur taux de résolution.

e) Les non-résolues ont pour probabilité $P\left(\overline{R}\right) = 1 - 0{,}737\,5 = 0{,}262\,5$. On inverse :

$$P_{\overline{R}}\left(\overline{S}\right) = \frac{0{,}180}{0{,}262\,5} \approx 0{,}686$$

Environ 68,6 **%** des demandes non résolues au premier appel étaient complexes, alors qu’elles ne représentent que 45 % du flux.

f) Sur 4 000 demandes :

$$4\,000 \times 0{,}262\,5 = 1\,050 \text{ demandes non résolues au premier appel}$$

dont, pour les complexes :

$$4\,000 \times 0{,}180 = 720$$

et $4\,000 \times 0{,}082\,5 = 330$ demandes simples non résolues.

Recommandation. Les demandes complexes représentent 45 % du flux mais 68,6 % des

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

appels non résolus : c’est là que se concentre le problème. Deux pistes, chiffrées.

Améliorer le traitement des complexes de 0,60 à 0,70 ferait gagner $0{,}45 \times 0{,}10 = 0{,}045$, soit 180 demandes résolues de plus par mois. Gagner dix points sur les simples, de 0,85 à 0,95, rapporterait un peu plus — $0{,}55 \times 0{,}10 = 0{,}055$, soit 220 demandes — mais serait bien plus difficile à obtenir : il faudrait porter à un niveau quasi parfait un taux déjà élevé, alors que passer de 60 % à 70 % sur les complexes est un progrès ordinaire de formation.

La recommandation raisonnable est donc de **former les conseillers aux demandes complexes**, ou de mettre en place une orientation directe vers un second niveau d’expertise : la marge de progression y est la plus accessible.

Le bilan du chapitre. Quatre outils, et quatre seulement : la définition de la conditionnelle, la formule du produit, la formule des probabilités totales, et le test d’indépendance. Tout le reste est de la traduction d’énoncé et de l’interprétation — c’est-à-dire l’essentiel.

Réponse. a) $P(S) = 0{,}55$, $P_S(R) = 0{,}85$, $P_{\overline{S}}(R) = 0{,}60$ — b) 0,467 5 ; 0,082 5 ; 0,270 ; 0,180, somme 1 ✓ — c) $P(R) = 0{,}737\,5$ — d) environ 63,4 % — e) environ 68,6 % — f) 1 050 demandes non résolues dont 720 complexes : former les conseillers aux demandes complexes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).