

Plaquette 2 - Arbres pondérés

Probabilités conditionnelles — Première générale

Exercices

Méthode

L'arbre pondéré est l'outil qui rend les probabilités conditionnelles **lisibles**. Il obéit à trois règles, et trois seulement : les branches parties d'un même nœud ont une somme de probabilités égale à 1 ; les branches du **second niveau** portent des probabilités **conditionnelles** ; et la probabilité d'un **chemin** est le **produit** des branches qui le composent. Le reste n'est que lecture. Les deux erreurs à éliminer sont d'**additionner** le long d'un chemin (on multiplie) et de mettre une probabilité simple là où l'arbre attend une conditionnelle. Cette plaquette apprend à construire un arbre à partir d'un texte, à le compléter quand il est partiel, et à passer de l'arbre au tableau croisé.

Exercice 1 - Compléter les branches manquantes

Un arbre pondéré à deux niveaux porte les probabilités suivantes : $P(A) = 0,35$, $P_A(B) = 0,80$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,20$.

- Déterminer $P(\bar{A})$.
- Déterminer $P_A(\bar{B})$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})$.
- Récapituler les huit probabilités de branches dans un tableau, et vérifier la règle de la somme à chaque nœud.

Exercice 2 - Probabilité d'un chemin

On reprend l'arbre précédent : $P(A) = 0,35$, $P_A(B) = 0,80$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,20$.

- Calculer la probabilité du chemin A puis B .
- Calculer la probabilité du chemin $\bar{A}$ puis B .
- Calculer les deux chemins restants, puis vérifier que la somme des quatre chemins vaut 1.

Exercice 3 - Construire un arbre à partir d'un texte

Une usine produit des pièces sur deux machines. La machine A fabrique 60 % de la production, la machine B le reste. Parmi les pièces issues de A , 2 % sont défectueuses ; parmi celles issues de B , 5 % le sont.

- Traduire les données en notations probabilistes.
- Donner les probabilités des quatre chemins de l'arbre.
- Vérifier que leur somme vaut 1.

Exercice 4 - Branche ou chemin ?

On reprend l'arbre de l'usine. Pour chacune des quantités suivantes, dire s'il s'agit d'une probabilité de **branche** ou de **chemin**, et donner sa valeur.

- a) $P_A(D)$
- b) $P(A \cap D)$
- c) $P(A)$
- d) $P_{\bar{A}}(\bar{D})$

Exercice 5 - Un arbre à trois branches au premier niveau

Une entreprise s'approvisionne chez trois fournisseurs : A fournit 50 % des pièces, B en fournit 30 % et C le reste. Les taux de pièces défectueuses sont respectivement 1 %, 4 % et 6 %.

- a) Déterminer $P(C)$.
- b) Donner les probabilités des trois chemins menant à une pièce défectueuse.
- c) Vérifier que la somme des six chemins de l'arbre vaut 1.

Exercice 6 - Tirages sans remise sur un arbre

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire deux boules successivement et sans remise.

- a) Donner les probabilités des deux branches du premier niveau.
- b) Donner les quatre probabilités conditionnelles du second niveau.
- c) Calculer les probabilités des quatre chemins et vérifier leur somme.

Exercice 7 - Compléter un arbre partiel

Un arbre pondéré vérifie $P(A) = 0,25$, $P(A \cap B) = 0,20$ et $P(\bar{A} \cap B) = 0,15$.

- a) Déterminer $P_A(B)$.
- b) Déterminer $P_{\bar{A}}(B)$.
- c) Compléter l'arbre en donnant les quatre probabilités de chemins.

Exercice 8 - De l'arbre au tableau croisé

Un arbre donne $P(A) = 0,40$, $P_A(B) = 0,75$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,25$.

- a) Calculer les quatre probabilités de chemins.
- b) Reporter ces valeurs dans un tableau croisé de probabilités, avec les marges.
- c) Lire $P(B)$ sur ce tableau, puis calculer $P_B(A)$.

Exercice 9 - Un événement, plusieurs chemins

On reprend l'arbre de l'usine : $P(A) = 0,60$, $P_A(D) = 0,02$, $P_{\bar{A}}(D) = 0,05$.

- a) Combien de chemins mènent à une pièce défectueuse ?
- b) Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse.
- c) En déduire la probabilité qu'elle ne le soit pas, de deux façons.

Exercice 10 - L'arbre d'un test de dépistage

Une maladie touche 2 % d'une population. Le test est positif chez 95 % des malades, et il est positif à tort chez 3 % des personnes non malades.

- Traduire les trois données en notations, avec M et T .
- Donner les probabilités des quatre chemins de l'arbre.
- Vérifier que leur somme vaut 1, puis calculer $P(T)$.

Exercice 11 - Un arbre à trois niveaux

On lance trois fois une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est 0,6. Les lancers sont indépendants.

- Donner la probabilité du chemin « pile, pile, pile ».
- Donner la probabilité du chemin « pile, face, pile ».
- Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux piles.

Exercice 12 - Repérer l'erreur sur un arbre

Un élève étudie l'arbre défini par $P(A) = 0,7$, $P_A(B) = 0,4$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,9$. Il écrit les trois lignes suivantes. Pour chacune, dire si elle est correcte et corriger si besoin.

- $P(A \cap B) = 0,7 + 0,4 = 1,1$
- $P(A \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$
- $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$

Exercice 13 - Retrouver une branche du second niveau

Un arbre vérifie $P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,50$ et $P(A \cap B) = 0,12$.

- Déterminer $P_A(B)$.
- Déterminer $P(\bar{A} \cap B)$, puis $P_{\bar{A}}(B)$.
- Donner les quatre probabilités de chemins de l'arbre.

Exercice 14 - Deux niveaux avec des effectifs

Dans un club de 600 adhérents, 420 sont majeurs. Parmi les majeurs, 35 % participent aux compétitions ; parmi les mineurs, 60 % y participent.

- Traduire les données en notations, avec M (majeur) et C (compétition).
- Calculer les effectifs correspondant aux quatre chemins de l'arbre.
- Combien d'adhérents participent aux compétitions ? En déduire $P(C)$.

Exercice 15 - Synthèse : deux entrepôts

Une enseigne expédie ses colis depuis deux entrepôts. L'entrepôt E_1 traite 65 % des colis, E_2 le reste. Un colis expédié depuis E_1 arrive en retard avec une probabilité de 0,08 ; depuis E_2 , avec une probabilité de 0,15.

- Traduire les données en notations, avec E_1 et R (retard).

- b) Donner les probabilités des quatre chemins de l'arbre, et vérifier leur somme.
- c) Calculer la probabilité qu'un colis arrive en retard.
- d) Sur 20 000 colis, combien de retards peut-on attendre ? Combien viennent de E_2 ?
- e) L'enseigne veut réduire les retards. D'après ces chiffres, sur quel entrepôt agir en priorité ? Discuter.