Plaquette 2 – Arbres pondérés

Probabilités conditionnelles — Première générale

Exercices

Méthode

L'arbre pondéré est l'outil qui rend les probabilités conditionnelles **lisibles**. Il obéit à trois règles, et trois seulement : les branches parties d'un même nœud ont une somme de probabilités égale à 1 ; les branches du **second niveau** portent des probabilités **conditionnelles** ; et la probabilité d'un **chemin** est le **produit** des branches qui le composent. Le reste n'est que lecture. Les deux erreurs à éliminer sont d'**additionner** le long d'un chemin (on multiplie) et de mettre une probabilité simple là où l'arbre attend une conditionnelle. Cette plaquette apprend à construire un arbre à partir d'un texte, à le compléter quand il est partiel, et à passer de l'arbre au tableau croisé.

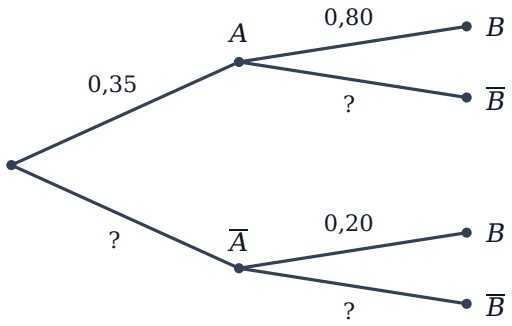
Exercice 1 – Compléter les branches manquantes

L'arbre pondéré ci-dessous porte les probabilités $P(A) = 0{,}35$, $P_A(B) = 0{,}80$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}20$; les autres branches sont à trouver.

a) Déterminer $P\left(\overline{A}\right)$.

b) Déterminer $P_A\left(\overline{B}\right)$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$.

c) Recopier l'arbre en complétant les six branches, et vérifier la règle de la somme à chaque nœud.



L'arbre à compléter

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

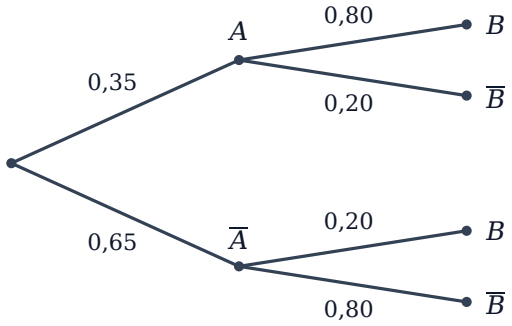
Exercice 2 – Probabilité d’un chemin

On reprend l’arbre précédent, complété :

a) Calculer la probabilité du chemin A puis B.

b) Calculer la probabilité du chemin $\overline{A}$ puis B.

c) Calculer les deux chemins restants, puis vérifier que la somme des quatre chemins vaut 1.



L'arbre de l'exercice précédent

Exercice 3 – Construire un arbre à partir d’un texte

Une usine produit des pièces sur deux machines. La machine A fabrique 60 % de la production, la machine B le reste. Parmi les pièces issues de A, 2 % sont défectueuses ; parmi celles issues de B, 5 % le sont.

a) Traduire les données en notations probabilistes.

b) Construire l’arbre pondéré et donner les probabilités de ses quatre chemins.

c) Vérifier que leur somme vaut 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Branche ou chemin ?

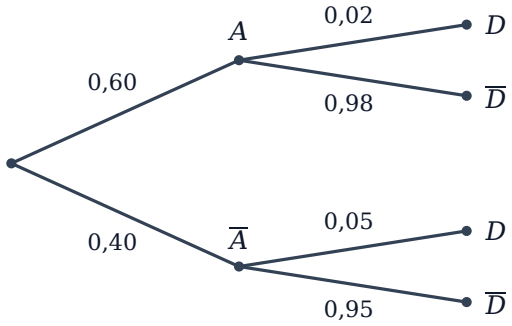
On reprend l'arbre de l'usine, rappelé ci-dessous. Pour chacune des quantités suivantes, dire s'il s'agit d'une probabilité de **branche** ou de **chemin**, et donner sa valeur.

a) $P_A(D)$

b) $P(A \cap D)$

c) $P(A)$

d) $P_{\overline{A}}\left(\overline{D}\right)$



L'arbre de l'usine

Exercice 5 – Un arbre à trois branches au premier niveau

Une entreprise s'approvisionne chez trois fournisseurs : A fournit 50 % des pièces, B en fournit 30 % et C le reste. Les taux de pièces défectueuses sont respectivement 1 %, 4 % et 6 %.

a) Déterminer $P(C)$.

b) Donner les probabilités des trois chemins menant à une pièce défectueuse.

c) Vérifier que la somme des six chemins de l'arbre vaut 1.

Exercice 6 – Tirages sans remise sur un arbre

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire deux boules successivement et sans remise.

a) Donner les probabilités des deux branches du premier niveau.

b) Donner les quatre probabilités conditionnelles du second niveau.

c) Calculer les probabilités des quatre chemins et vérifier leur somme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

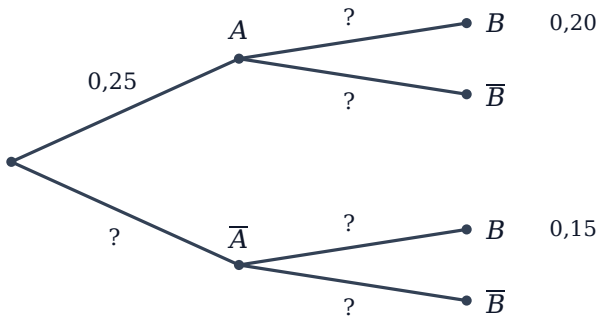
Exercice 7 – Compléter un arbre partiel

Un arbre pondéré vérifie $P(A) = 0{,}25$, $P(A \cap B) = 0{,}20$ et $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}15$.

a) Déterminer $P_A(B)$.

b) Déterminer $P_{\overline{A}}(B)$.

c) Compléter l'arbre en donnant les quatre probabilités de chemins.



Les chemins A∩B et Ā∩B sont connus

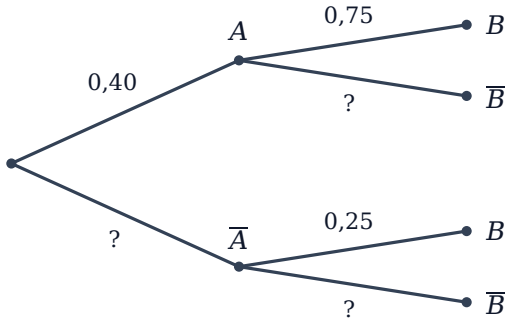
Exercice 8 – De l'arbre au tableau croisé

Un arbre donne $P(A) = 0{,}40$, $P_A(B) = 0{,}75$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$.

a) Calculer les quatre probabilités de chemins.

b) Reporter ces valeurs dans un tableau croisé de probabilités, avec les marges.

c) Lire $P(B)$ sur ce tableau, puis calculer $P_B(A)$.



L'arbre donné

Exercice 9 – Un événement, plusieurs chemins

On reprend l'arbre de l'usine : $P(A) = 0{,}60$, $P_A(D) = 0{,}02$, $P_{\overline{A}}(D) = 0{,}05$.

a) Combien de chemins mènent à une pièce défectueuse ?

b) Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse.

c) En déduire la probabilité qu'elle ne le soit pas, de deux façons.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – L’arbre d’un test de dépistage

Une maladie touche 2 % d’une population. Le test est positif chez 95 % des malades, et il est positif à tort chez 3 % des personnes non malades.

a) Traduire les trois données en notations, avec M et T.

b) Donner les probabilités des quatre chemins de l’arbre.

c) Vérifier que leur somme vaut 1, puis calculer $P(T)$.

Exercice 11 – Un arbre à trois niveaux

On lance trois fois une pièce truquée pour laquelle la probabilité d’obtenir pile est 0,6. Les lancers sont indépendants.

a) Donner la probabilité du chemin « pile, pile, pile ».

b) Donner la probabilité du chemin « pile, face, pile ».

c) Calculer la probabilité d’obtenir exactement deux piles.

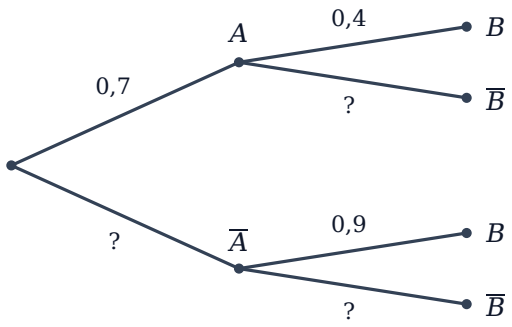
Exercice 12 – Repérer l’erreur sur un arbre

Un élève étudie l’arbre défini par $P(A) = 0{,}7$, $P_A(B) = 0{,}4$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}9$. Il écrit les trois lignes suivantes. Pour chacune, dire si elle est correcte et corriger si besoin.

a) $P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}4 = 1{,}1$

b) $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$

c) $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$



L'arbre étudié par l'élève

Exercice 13 – Retrouver une branche du second niveau

Un arbre vérifie $P(A) = 0{,}30$, $P(B) = 0{,}50$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$.

a) Déterminer $P_A(B)$.

b) Déterminer $P\left(\overline{A} \cap B\right)$, puis $P_{\overline{A}}(B)$.

c) Donner les quatre probabilités de chemins de l’arbre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Deux niveaux avec des effectifs

Dans un club de 600 adhérents, 420 sont majeurs. Parmi les majeurs, 35 % participent aux compétitions ; parmi les mineurs, 60 % y participent.

a) Traduire les données en notations, avec M (majeur) et C (compétition).

b) Calculer les effectifs correspondant aux quatre chemins de l'arbre.

c) Combien d'adhérents participent aux compétitions ? En déduire $P(C)$.

Exercice 15 – Synthèse : deux entrepôts

Une enseigne expédie ses colis depuis deux entrepôts. L'entrepôt E_1 traite 65 % des colis, E_2 le reste. Un colis expédié depuis E_1 arrive en retard avec une probabilité de 0,08 ; depuis E_2, avec une probabilité de 0,15.

a) Traduire les données en notations, avec E_1 et R (retard).

b) Donner les probabilités des quatre chemins de l'arbre, et vérifier leur somme.

c) Calculer la probabilité qu'un colis arrive en retard.

d) Sur 20 000 colis, combien de retards peut-on attendre ? Combien viennent de E_2 ?

e) L'enseigne veut réduire les retards. D'après ces chiffres, sur quel entrepôt agir en priorité ? Discuter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).