Plaquette 1 – Probabilité conditionnelle : définition

Probabilités conditionnelles — Première générale

Exercices

Méthode

Conditionner, c'est **changer d'univers** : au lieu de regarder toute la population, on ne regarde plus que la partie qui vérifie une condition. La probabilité $P_A(B)$ se lit « probabilité de B **sachant** A », et c'est la proportion de B **à l'intérieur** de A. D'où la formule unique de la plaquette, $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: le numérateur compte ce qui est dans les deux, le dénominateur ce qui sert de nouvel univers. L'erreur à combattre dès le début est la **confusion des deux sens** : $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne sont pas égales, et les confondre conduit à des conclusions absurdes — notamment sur les tests médicaux, où cette confusion porte un nom.

Exercice 1 – Lire les probabilités dans un tableau

Dans un lycée de 200 élèves de Première, on relève l'inscription à l'association sportive.

·	Inscrit (S)	Non inscrit	Total
Filles (F)	60	60	120
Garçons	50	30	80
Total	110	90	200

On choisit un élève au hasard.

a) Calculer $P(F)$ et $P(S)$.

b) Calculer $P(F \cap S)$.

c) Traduire en une phrase l'événement $F \cap S$.

Exercice 2 – Appliquer la formule de la conditionnelle

On reprend le tableau précédent : $P(F) = 0{,}6$, $P(S) = 0{,}55$ et $P(F \cap S) = 0{,}3$.

a) Calculer $P_F(S)$ à l'aide de la formule du cours.

b) Retrouver ce résultat directement par un quotient d'effectifs.

c) Traduire ce résultat en une phrase.

Exercice 3 – Les deux sens ne sont pas les mêmes

Toujours avec le même tableau :

a) Calculer $P_S(F)$.

b) Comparer $P_S(F)$ et $P_F(S)$, et expliquer pourquoi les deux valeurs diffèrent.

c) Traduire chacune des deux probabilités en une phrase distincte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Traduire un énoncé en notations

Dans une entreprise, on note C l'événement « le salarié est cadre » et T l'événement « le salarié télétravaille ».

Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide des notations P, P_C, P_T, $\cap$ et des événements contraires.

a) 30 % des salariés sont cadres.

b) Parmi les cadres, 70 % télétravaillent.

c) 18 % des salariés sont des cadres qui télétravaillent.

d) Parmi les salariés qui télétravaillent, 45 % sont cadres.

Exercice 5 – La formule du produit

Dans une usine, 40 % des pièces proviennent de la machine A. Parmi les pièces issues de A, 3 % sont défectueuses. On note A l'événement « la pièce vient de la machine A » et D « la pièce est défectueuse ».

a) Traduire les deux données de l'énoncé en notations.

b) Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard vienne de A **et** soit défectueuse.

c) Sur un lot de 5 000 pièces, combien de pièces défectueuses issues de A peut-on attendre ?

Exercice 6 – Retrouver une probabilité manquante

On sait que $P(A \cap B) = 0{,}18$ et $P_A(B) = 0{,}45$.

a) Déterminer $P(A)$.

b) Sachant de plus que $P(B) = 0{,}30$, calculer $P_B(A)$.

c) Vérifier la cohérence des résultats avec la formule du produit écrite dans l'autre sens.

Exercice 7 – Un test de dépistage

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test de dépistage est positif chez 95 % des personnes malades. On note M l'événement « la personne est malade » et T « le test est positif ».

a) Traduire les données en notations.

b) Calculer $P(M \cap T)$.

c) Sur une population de 100 000 personnes, combien de malades au test positif peut-on attendre ?

d) La probabilité $P_T(M)$ vaut-elle aussi 0,95 ? Justifier sans la calculer.

Exercice 8 – Calculer directement sur les effectifs

Un magasin a vendu 400 ordinateurs. Le tableau donne la répartition selon le système d'exploitation et l'extension de garantie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

·	Garantie (G)	Sans garantie	Total
Système X (X)	90	150	240
Système Y	70	90	160
Total	160	240	400

a) Calculer $P_X(G)$ par un quotient d'effectifs.

b) Calculer $P_G(X)$ de même.

c) Calculer $P_{\overline{X}}(G)$ et comparer à $P_X(G)$.

Exercice 9 – Compléter un tableau croisé

Un sondage porte sur 500 personnes. On sait que 300 sont des femmes, que 200 personnes utilisent les transports en commun, et que 140 femmes les utilisent.

a) Recopier et compléter le tableau croisé.

·	Transports (T)	Sans transports	Total
Femmes (F)	?	?	?
Hommes	?	?	?
Total	?	?	500

b) Calculer $P_F(T)$ et $P_{\overline{F}}(T)$.

c) Les femmes utilisent-elles davantage les transports en commun que les hommes ?

Exercice 10 – Conditionnelle et événement contraire

On donne $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(B) = 0{,}25$.

a) Calculer $P_A\left(\overline{B}\right)$.

b) Calculer $P\left(A \cap \overline{B}\right)$.

c) Vérifier que $P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A)$.

Exercice 11 – Un jeu de cartes

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note R l'événement « la carte est rouge » et V l'événement « la carte est une figure » (valet, dame ou roi).

a) Calculer $P(R)$ et $P(V)$.

b) Calculer $P(R \cap V)$.

c) Calculer $P_R(V)$ et $P_V(R)$, puis comparer ces deux valeurs à $P(V)$ et $P(R)$.

Exercice 12 – Deux lancers de dé

On lance deux fois un dé équilibré à six faces et on note la somme des deux résultats. On considère les événements S : « la somme est supérieure ou égale à 10 » et D : « le premier lancer donne 6 ».

a) Calculer $P(D)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Déterminer $P(S \cap D)$ en dénombrant les issues favorables parmi les 36 possibles.

c) Calculer $P_D(S)$ et l'interpréter.

Exercice 13 – Tirages sans remise

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire deux boules **successivement et sans remise**. On note R_1 l'événement « la première boule est rouge » et R_2 « la seconde boule est rouge ».

a) Calculer $P(R_1)$.

b) Calculer $P_{R_1}(R_2)$ en décrivant la composition de l'urne après le premier tirage.

c) En déduire $P(R_1 \cap R_2)$.

Exercice 14 – Vrai ou faux sur les conditionnelles

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

a) On a toujours $P_A(B) = P_B(A)$.

b) On a toujours $P_A(B) + P_A\left(\overline{B}\right) = 1$.

c) On a toujours $P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = 1$.

d) Si $P(A \cap B) = 0$, alors $P_A(B) = 0$.

Exercice 15 – Synthèse : une enquête sur les transports

Une enquête porte sur 800 salariés d'une zone d'activité. Parmi eux, 320 habitent à moins de 5 km de leur travail. On note C l'événement « le salarié habite à moins de 5 km » et V l'événement « le salarié vient à vélo ». On sait que $P_C(V) = 0{,}45$ et que $P_{\overline{C}}(V) = 0{,}10$.

a) Calculer $P(C)$ et $P\left(\overline{C}\right)$.

b) Calculer $P(C \cap V)$ et $P\left(\overline{C} \cap V\right)$, puis les effectifs correspondants.

c) Compléter le tableau croisé des effectifs.

d) Calculer $P(V)$, puis $P_V(C)$.

e) Interpréter $P_V(C)$ en une phrase et la comparer à $P_C(V)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).