Plaquette 4 – Indépendance

Probabilités conditionnelles — Première générale

Exercices

Méthode

Deux événements sont **indépendants** quand savoir que l'un est réalisé ne change rien à la probabilité de l'autre. Le test est une simple multiplication : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Attention, il s'agit bien d'un **test** — on ne décrète pas l'indépendance, on la vérifie, sauf quand l'énoncé l'affirme (lancers successifs, composants distincts, tirages avec remise). Deux confusions à éliminer d'emblée : indépendant ne veut **pas** dire incompatible (c'est même presque le contraire), et « les deux sont indépendants » n'autorise la multiplication que pour l'**intersection**, jamais pour la réunion. La plaquette se termine sur les répétitions d'épreuves indépendantes, où la multiplication devient une puissance.

Exercice 1 – Tester l'indépendance sur un tableau

Sur 200 personnes interrogées, 80 sont abonnées à un service A et 50 à un service B ; 20 sont abonnées aux deux.

a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

b) Comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

c) Les deux abonnements sont-ils indépendants ?

Exercice 2 – Un cas de dépendance

On reprend les mêmes effectifs, mais cette fois 30 personnes sont abonnées aux deux services (sur 200, avec 80 abonnés à A et 50 à B).

a) Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

b) Les événements sont-ils indépendants ?

c) Calculer $P_A(B)$ et la comparer à $P(B)$. Interpréter.

Exercice 3 – Couleur et figure dans un jeu de cartes

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On note R « la carte est rouge » et V « la carte est une figure ».

a) Calculer $P(R)$, $P(V)$ et $P(R \cap V)$.

b) Montrer que R et V sont indépendants.

c) Expliquer ce résultat par la structure du jeu.

Exercice 4 – Utiliser l'indépendance pour calculer

Deux événements A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0{,}30$ et $P(B) = 0{,}60$.

a) Calculer $P(A \cap B)$.

b) Calculer $P(A \cup B)$.

c) Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Indépendance des événements contraires

Les événements A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0{,}40$ et $P(B) = 0{,}25$.

a) Calculer $P(A \cap B)$, puis $P\left(A \cap \overline{B}\right)$.

b) Vérifier que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

c) Calculer $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ et vérifier de même.

Exercice 6 – Indépendant ou incompatible ?

On lance un dé équilibré à six faces. On note A l'événement « le résultat est pair » et B l'événement « le résultat est 3 ».

a) Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Justifier.

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier par le calcul.

c) Que peut-on conclure sur le lien entre les deux notions ?

Exercice 7 – Deux lancers de dé

On lance deux fois un dé équilibré. On note A « le premier lancer donne 6 » et B « le second lancer donne un nombre pair ».

a) Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

b) Calculer $P(A \cap B)$ en dénombrant les issues favorables.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 8 – Deux composants en série

Un appareil comporte deux composants indépendants. Le premier fonctionne sans panne pendant un an avec une probabilité de 0,98, le second avec une probabilité de 0,95. L'appareil ne fonctionne que si les **deux** composants fonctionnent.

a) Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne pendant un an.

b) Calculer la probabilité qu'il tombe en panne dans l'année.

c) La fiabilité de l'appareil est-elle meilleure ou moins bonne que celle de chacun de ses composants ? Commenter.

Exercice 9 – Deux composants en parallèle

Un système de secours comporte deux pompes indépendantes. Chacune tombe en panne avec une probabilité de 0,02 pour la première et 0,05 pour la seconde. Le système fonctionne si **au moins une** pompe fonctionne.

a) Calculer la probabilité que les deux pompes tombent en panne.

b) En déduire la probabilité que le système fonctionne.

c) Comparer à la fiabilité d'une pompe seule, et conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Répétition d'épreuves indépendantes

Un basketteur réussit chaque lancer franc avec une probabilité de 0,80, indépendamment des autres. Il tire trois lancers francs.

a) Calculer la probabilité qu'il réussisse les trois.

b) Calculer la probabilité qu'il en manque au moins un.

c) Calculer la probabilité qu'il les manque tous les trois.

Exercice 11 – Deux contrôles indépendants

Une pièce défectueuse est soumise à deux contrôles indépendants. Le premier la détecte avec une probabilité de 0,90, le second avec une probabilité de 0,80.

a) Calculer la probabilité qu'aucun des deux contrôles ne la détecte.

b) En déduire la probabilité qu'elle soit détectée.

c) Combien de contrôles à 0,80 faudrait-il pour atteindre une détection d'au moins 0,99 ?

Exercice 12 – Déterminer une valeur pour avoir l'indépendance

Un tableau croisé porte sur 400 personnes. On sait que $P(A) = 0{,}50$ et $P(B) = 0{,}30$.

a) Quelle devrait être la valeur de $P(A \cap B)$ pour que A et B soient indépendants ?

b) À quel effectif de la case croisée cela correspond-il ?

c) Si l'effectif observé de la case croisée est 72, les événements sont-ils indépendants ? Dans quel sens sont-ils liés ?

Exercice 13 – Vrai ou faux sur l'indépendance

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

a) Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

b) Si A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, alors ils sont dépendants.

c) Si $P_A(B) = P(B)$, alors A et B sont indépendants.

d) Deux événements de probabilités 0,5 et 0,4 dont l'intersection a pour probabilité 0,2 sont indépendants.

Exercice 14 – Tirages avec et sans remise

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire deux boules.

a) Les tirages se font **avec** remise. Calculer la probabilité d'obtenir deux blanches, et dire si les deux tirages sont indépendants.

b) Les tirages se font **sans** remise. Reprendre la question.

c) Comparer les deux résultats et expliquer l'écart.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : un système de sécurité

Un local est protégé par trois dispositifs indépendants : une alarme (déclenchée dans 92 % des intrusions), un détecteur de mouvement (85 %) et une caméra avec analyse d'image (78 %).

a) Calculer la probabilité qu'aucun des trois ne se déclenche lors d'une intrusion.

b) En déduire la probabilité qu'au moins un se déclenche.

c) Calculer la probabilité que les trois se déclenchent.

d) Calculer la probabilité qu'exactement un seul se déclenche.

e) Le gérant veut atteindre une détection d'au moins 99,9 %. L'objectif est-il déjà atteint ? Sinon, que proposer ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).